

保型形式の整数論(保型形式の具体的構成を軸とした研究)

Arithmetic theory of automorphic forms, mainly in terms of their explicit construction

キーワード：保型形式のリフティング、周期とL関数、フーリエ展開 /key words: Lifting construction, Periods and L-functions, Fourier expansion

成田 宏秋 准教授 Ph. D. / **Hiro-aki Narita** Assoc. Prof., Ph.D.

基礎科学部門 数学分野 / Research Field of Mathematics, Division of Natural Science

E-mail : narita@sci.※ Tel : 096-342-3324 URL : <http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~narita/narita.htm>

保型形式とは「保型性」という豊富な対称性を備えた実解析的関数である。これを「具体的に作って見せる」のが私の基本的な問題意識である。特殊関数論や簡約群の表現論などを駆使して、保型形式の具体的構成やその数論的性質を詳細に調べるのが研究スタイルである。

●保型形式のフーリエ展開の理論

フーリエ展開は保型形式から整数論的情報を取り出す基礎を与えるものである。私のこれまで一般の非例外型管型領域上の正則保型形式と四元数双曲空間上の実解析的保型形式のフーリエ展開の理論の研究を行った。後者の応用として、非正則実解析的保型形式で「Koecher原理」という多変数複素関数論の「Hartogsの接続定理」の類似の性質を持つものがあるという発見に至っている。

●Bessel周期とL関数の中心値との関係

具体的には次数2不定符号四元数ユニタリー群上の「テータリフト」により具体的に与えた実解析的保型形式のフーリエ係数(Bessel周期)の2乗を、ある次数8の保型L関数の中心値(関数等式の中点での値)と明示的に関連される公式を与えた。これは有名な半整数重さの楕円カスプ形式のフーリエ係数の2乗と保型L関数の中心値を関連させる「Waldspurgerの公式」が一つの原型と言える。

●リフティングによる実解析的保型形式の構成

最近、実双曲空間上の保型形式を複素上半平面上の実解析的マース形式からの「リフティング」により構成するという研究を主に行っている。これは「ラマヌジャン予想の反例」という多変数保型形式独特の現象を与えることが期待され、事実5次元の場合で具体例を与えた。

Automorphic forms are real analytic functions with a rich symmetry called “automorphy”. My fundamental concern in the research is explicit constructions of automorphic forms. The approach of my research is to carry out explicit constructions of automorphic forms and study their arithmetic properties in a great detail by means of the theory of special functions and the representation theory of reductive groups.

The theory of Fourier expansions : Theories of the Fourier expansion provide foundation in the arithmetic of automorphic forms. I have studied such theory for holomorphic automorphic forms on non-exceptional tube domains and real analytic automorphic forms on quaternion hyperbolic spaces. As an application of the latter, I have found some non-holomorphic automorphic forms satisfying “Koecher principle”, which can be viewed as an analogue of “Hartogs extension theorem” in the theory of complex analysis of multi-variables.

Bessel periods and central L-values: To be precise, I have studied these for some automorphic forms on the indefinite quaternion unitary group of degree two (given by “theta lifts”). The result is an explicit formula for the square-norm of their Fourier coefficients (Bessel periods) in terms of central L-values of some degree 8 automorphic L-functions. The well-known “Waldspurger’s formula” is a prototype of this result.

Lifting construction of real analytic automorphic forms: This is my most recent research. I am working on lifting constructions of real analytic automorphic forms on real hyperbolic spaces. This construction is expected to provide counterexamples to “Ramanujan conjecture”, which is a special feature of automorphic forms of multi-variables. In fact, I have such a counterexample for the 5-dimensional case.