

1

$I = \{1, \dots, 6\}$, $G = S_6$ とおく。

(問 1) $k_{r+1} = k_1$ とおく。与式の左辺と右辺の置換をそれぞれ α, β とおく。 $k \in I$ とし, $\alpha(k) = \beta(k)$ を示す。 $k = \rho(k_i)$ ($1 \leq i \leq r$) と書けるとする。この時, $\alpha(k) = \rho(k_1 k_2 \cdots k_r) \rho^{-1}(\rho(k_i)) = \rho(k_1 k_2 \cdots k_r)(k_i) = \rho(k_{i+1}) = (\rho(k_1) \rho(k_2) \cdots \rho(k_r))(\rho(k_i)) = \beta(k)$ より, $\alpha(k) = \beta(k)$ である。 $k = \rho(k_i)$ ($1 \leq i \leq r$) と書けないときは, $\alpha(k) = k = \beta(k)$ である。以上より, $\alpha = \beta$ 。

(問 2) 15。 (証明) σ の共役類は, 型が $(2, 2, 2)$ の置換 $(k_1 k_2)(k_3 k_4)(k_5 k_6)$ 全体からなる。このような置換を数え上げる。 $1, \dots, 6$ の順列全体が $6!$ あり, それを 3 互換の並び替えの自由度 $3!$ と, 3 互換内での文字の並び替えの自由度 2^3 で割れば良いので, 答えは $6!/(3! \times 2^3) = 15$ 。

(問 3) σ の共役類を $O_G(\sigma)$ とおくと, $|O_G(\sigma)| = |G|/|Z_G(\sigma)|$ が成り立つので, (問 2) より $|Z_G(\sigma)| = |G|/|O_G(\sigma)| = 6!/15 = 48$ 。

(問 4) $\langle (135)(246) \rangle$ はシロー 3 部分群である。(証明) $Z_G(\sigma)$ の位数は $48 = 3 \times 2^4$ なので, シロー 3 部分群の位数は 3 である。元 $g = (135)(246)$ による共役は, (問 1) より, σ を構成する 3 つの互換を並び替えるように作用するので, $g\sigma g^{-1} = \sigma$ 。よって, $g \in Z_G(\sigma)$ である。 g は位数 3 なので, $\langle g \rangle$ は $Z_G(\sigma)$ のシロー 3 部分群である。

(問 5) $H = \langle (12), (34), (56) \rangle$ とおく。(問 1) より, $(12)\sigma(12)^{-1} = (21)(34)(56) = \sigma$ なので, $(12) \in Z_G(\sigma)$ が成り立つ。同様にして $(34), (56) \in Z_G(\sigma)$ が

成り立つ。 H は $(1\ 2), (3\ 4), (5\ 6)$ を含む最小の部分群だから, $H \subset Z_G(\sigma)$ である。あとは, $\rho \in Z_G(\sigma)$ とし, $\rho(k\ k+1)\rho^{-1} \in H$ ($k = 1, 3, 5$) を示せば良い。仮定と (問 1) より, $\sigma = \rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(1)\ \rho(2))(\rho(3)\ \rho(4))(\rho(5)\ \rho(6))$ だから, $(\rho(k)\ \rho(k+1))$ は, $(1\ 2), (3\ 4), (5\ 6)$ のいずれかと一致する。 $\rho(k\ k+1)\rho^{-1} = (\rho(k)\ \rho(k+1))$ なので, $\rho(k\ k+1)\rho^{-1} \in H$ が成り立つ。以上より, H は $Z_G(\sigma)$ の正規部分群である。

(問 1) (x_0, x_0) を基点とする閉道 $\alpha : I \rightarrow S^1 \times S^1$ を $\alpha(t) = (f(t), g(t))$ と書く。
 この時 α が連続であることと、 f, g がどちらも連続であることは同値である。
 $[\alpha], [f], [g]$ などによって点付きホモトピー同値類を表すことにする。
 点付きホモトピー同値を \simeq で表す。

$$S : \pi_1(S^1 \times S^1, (x_0, x_0)) \rightarrow \pi_1(S^1, x_0) \times \pi_1(S^1, x_0)$$

を $S([\alpha]) = ([f], [g])$ と定める。

S は well-defined。

$\alpha = (f, g) \simeq \alpha' = (f', g')$ とすると $f \simeq f', g \simeq g'$ となる。ゆえに well-defined。

S は準同型。

$\beta = (k, h)$ とすると、

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha\beta] = [(f, g)(k, h)] = [(fk, gh)]。$$

ゆえに

$$S([\alpha] \cdot [\beta]) = ([fk], [gh]) = ([f], [g]) \cdot ([k], [h]) = S([\alpha]) \cdot S([\beta])。$$

また明らかに $S([e_{(x_0, x_0)}]) = ([e_{x_0}], [e_{x_0}])$ より単位元を単位元に写す (e_{x_0} は x_0 における定道)。よって S は準同型写像である。

S は単射。

$([g], [h]) = ([e_{x_0}], [e_{x_0}])$ とする。すると $g \simeq e_{x_0}, h \simeq e_{x_0}$ 。ゆえに

$$[(g, h)] = [(e_{x_0}, e_{x_0})] = [e_{(x_0, x_0)}] \circ$$

S は全射。

これは明らかである。以上より S は同型写像。

以上から $\pi_1(S^1 \times S^1) \simeq \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 。

(問2) $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ を $p(t) := (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ と定めると、これは被覆写像になる。実際任意の点 $(\cos 2\pi t_0, \sin 2\pi t_0)$, $t_0 \in [0, 1)$ に対して

$$U := \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t); t \in (t_0 - 1/2, t_0 + 1/2)\}$$

と定めれば

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \left(t_0 + n - \frac{1}{2}, t_0 + n + \frac{1}{2} \right) \right\}$$

のように p を通して U と同相な、互いに素な開集合で記述できる。明らかに

$$\mathbb{R}^2 \ni (s, t) \mapsto (p(s), p(t)) \in S^1 \times S^1$$

は被覆写像であり、 \mathbb{R}^2 は単連結なので \mathbb{R}^2 は普遍被覆空間である。

(問3) $S^1 \times \mathbb{R}$ の基本群は \mathbb{Z} である。また、

$$S^1 \times \mathbb{R} \ni (\theta, t) \mapsto (\theta, p(t)) \in S^1 \times S^1$$

は被覆写像になっている。よって $S^1 \times \mathbb{R}$ が求めるものである。 \square

(問1) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ なので $g(z) = e^z - 1 - z = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 。また, $g(z) = z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!}$ と書けるので $z=0$ は $g(z)$ の位数2の零点である。

(問2) $|z|=1$ のとき

$$\left| e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2} \right| = \left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1 - 1 - \frac{1}{2} = e - \frac{5}{2}。$$

$h(z) = e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}$ とおくと, $g(z) = \frac{z^2}{2} + h(z)$ と書ける。 $|z|=1$ のとき

$$\left| \frac{z^2}{2} \right| = \frac{1}{2} = 0.5 > e - \frac{5}{2} \geq |h(z)|。$$

よってルーシェの定理より $g(z)$ と $\frac{z^2}{2}$ の C の内部の零点の個数は等しい。 $\frac{z^2}{2}$ の零点の個数は (重複度も込めて) 2 であり, $z=0$ は $g(z)$ の位数2の零点なので, $g(z)$ は0以外の零点を持たない。

(問3) $\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} = z \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m+1)!}$ は $z=0$ を位数1の零点としてもっているので, $z=0$ は $f(z)$ の位数1の極である。よって

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); 0) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} \right)^{-1} = 4\pi i。 \end{aligned}$$

(問1) $(G \circ f)^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R}^d : G(f(x)) \in I\}$. 以下が成立 :

$$G(f(x)) \in I \iff f(x) \in G^{-1}(I) \iff x \in f^{-1}(G^{-1}(I))$$

$G(x)$ の条件より, $G^{-1}(I)$ は \mathbb{R} の開集合。 $f(x)$ は \mathbb{R}^d 上ルベグ可測関数なので, \mathbb{R} の開集合の $f(x)$ による逆像は \mathbb{R}^d のルベグ可測集合。 \square

(問2) $f_n(x)$ および $f(x)$ は \mathbb{R}^d 上ルベグ可測関数より, $E_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)\right\}$ とおくと, E_0 は \mathbb{R}^d 上ルベグ可測集合。

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \ (n \rightarrow \infty) \ (\text{ほとんどすべての } x \in \mathbb{R}^d) \iff |\mathbb{R}^d \setminus E_0| = 0.$$

$G(x)$ は \mathbb{R} 上連続関数。したがって $(x \in E_0$ を固定して考えて)

$$G(f_n(x)) \rightarrow G(f(x)) \quad (\text{すべての } x \in E_0)$$

(問1) より, $G(f_n(x))$ および $G(f(x))$ は \mathbb{R}^d 上ルベグ可測関数。よって, $E_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \lim_{n \rightarrow \infty} G(f_n(x)) = G(f(x))\right\}$ とおくと, E_1 は \mathbb{R}^d 上ルベグ可測集合。

$E_0 \subset E_1$ により, $\mathbb{R}^d \setminus E_0 \supset \mathbb{R}^d \setminus E_1$ であり,

$$0 \leq |\mathbb{R}^d \setminus E_1| \leq |\mathbb{R}^d \setminus E_0| = 0$$

したがって $|\mathbb{R}^d \setminus E_1| = 0$ 。 \square

(問3) $G(x)$ は \mathbb{R} 上有界より, $|G(f_n(x))| \leq M$ ($\forall n \in \mathbb{N}$, ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^d$)。

とくに, $\chi_E(x)$ をルベーグ可測集合 E の定義関数とすると,

$$|G(f_n(x))\chi_E(x)| \leq M\chi_E(x) \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \text{ほとんどすべての } x \in \mathbb{R}^d)$$

また,

$$\int_{\mathbb{R}^d} M\chi_E(x)dx = M|E| < \infty$$

以上より, ルベーグの収束定理を適用できて主張が成立。

□