2026 年度　熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験問題
理学専攻・数学コース　専門基礎科目　解答例

$\boxed{1}$

(問 1)

$$B\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1/2 + y_2 \\ 3y_2/4 + y_3 \\ 16y_3/19 + y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

より, $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$, $y_3 = 5/8$, $y_4 = 9/19$ を得る。

(問 2) B の逆行列を求める。

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16/19 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16/19 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/8 & -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16/19 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/8 & -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6/19 & 12/19 & -16/19 & 1 \end{array}\right]$$

よって,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 3/8 & -3/4 & 1 & 0 \\ -6/19 & 12/19 & -16/19 & 1 \end{bmatrix}.$$

このとき,

$$C = B^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 19/4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1/19 \end{bmatrix}.$$

また,

$$C\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_1+2z_2 \\ 4z_2+3z_3 \\ 19z_3/4+6z_4 \\ -z_4/19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 5/8 \\ 9/19 \end{bmatrix}$$

より, $z_4 = -9$, $z_3 = 23/2$, $z_2 = -17/2$, $z_1 = 9$ を得る。

(問 3) $A = BC$ より, $|A| = |B||C|$ である。 $|B| = 1$, $|C| = -2$ より, $|A| = -2$ を得る。

(問 4) $A = BC$ より,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = C^{-1}B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = C^{-1}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

より, $x_1 = 9$, $x_2 = -17/2$, $x_3 = 23/2$, $x_4 = -9$ を得る。

$\boxed{2}$

(問 1) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

(問 2) $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$S_N \equiv \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

とおく。I を有界閉区間とする。$\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ が I において e^{-x^2} に一様収束することを示せばよい。テイラーの定理より, 任意の $t \leq 0$ に対して, ある $\theta \in (0,1)$ が存在して,

$$e^t = \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} + \frac{e^{\theta t}}{(N+1)!} t^{N+1}$$

をみたす。$x \in I$ に対して, $t = -x^2$ とおくと,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \frac{(-1)^{N+1} e^{-\theta x^2}}{(N+1)!} x^{2(N+1)}$$

となる。I は有界なので, ある $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in I$ に対して $|x| \leq M$ をみたす。よって, 任意の $x \in I$ に対して,

$$\left| e^{-x^2} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \right| \leq \frac{e^{-\theta x^2}}{(N+1)!} |x|^{2(N+1)} \leq \frac{M^{2(N+1)}}{(N+1)!} \to 0 \quad (N \to \infty)$$

を得る。最後の極限において, $a \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ であることを用いた。 以上より, 主張が従う。

(問 3) $x > 0$ とし, $I = [0, x]$ とする ($x < 0$ のとき, $I = [x, 0]$ とする)。(問 2) より, $t \in I$ に対して,

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}$$

は I において一様収束するので, 両辺 0 から x まで積分すると, 項別積分より,

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$$

を得る。

(問 4)　(問 2) より, ある $\theta \in (0,1)$ が存在して,

$$f(1) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} + \frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)!} \int_0^1 e^{-\theta t^2} t^{2(N+1)}\, dt$$

となる。$N = 4$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = \frac{5651}{7560} = 0.74748\ldots$$

となり,

$$\left| \frac{(-1)^5}{5!} \int_0^1 e^{-\theta t^2} t^{10}\, dt \right| \leq \frac{1}{120} \int_0^1 t^{10}\, dt = \frac{1}{120 \times 11} = \frac{1}{1320} < 0.001$$

となることから, 小数第 3 位は切り捨てて, 0.74 である。

$\boxed{3}$

(問 1) α, β は S の点で，いずれも点列 $\{a_n\}$ の極限であるとする。$\alpha \neq \beta$ を仮定する。S はハウスドルフ空間なので，α, β それぞれの近傍 U, V を選んで，$U \cap V = \emptyset$ が成り立つようにできる。α は $\{a_n\}$ の極限なので，ある番号 N_α が存在して，$n > N_\alpha$ に対し $a_n \in U$ が成り立つ。β も $\{a_n\}$ の極限なので，ある番号 N_β が存在して，$n > N_\beta$ に対し $a_n \in V$ が成り立つ。このとき $N > N_\alpha, N > N_\beta$ を満たす番号 N をとると，$n > N$ に対し $a_n \in U \cap V$ が成り立つことになるが，これは $U \cap V = \emptyset$ に反する。よって $\alpha = \beta$ が成り立つ。

(問 2) $\mathbb{Q}$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相を導入するとき，$\mathbb{Q}$ の開集合は，$\mathbb{Q} \cap O$ という形の集合である，ただし O は $\mathbb{R}$ の開集合である。$\mathbb{R}$ の開集合として，$O_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}, O_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid x > \sqrt{2}\}$ をとると，$U_1 := \mathbb{Q} \cap O_1$, $U_2 := \mathbb{Q} \cap O_2$ はいずれも $\mathbb{Q}$ の空でない開集合で，$U_1 \cap U_2 = \emptyset, U_1 \cup U_2 = \mathbb{Q}$ を満たす。よって $\mathbb{Q}$ は連結ではない。

(問 3) f が定数関数ならば，f は恒等的に 0 であり，このとき f の最大値および最小値は 0 である。以下，f は定数関数ではないと仮定する。このとき f はある点 p で 0 でない値をとる。正数 $\varepsilon > 0$ は $\varepsilon < |f(p)|/2$ を満たすとする。このときある正数 $R > 0$ に対し，実数 x が $|x| > R$ を満たすならば $|f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ。有界閉区間 $[-R, R]$ 上で連続関数 f は最大値 M および最小値 m をとる。このとき $M \geqq |f(p)|$ または $m \leqq -|f(p)|$ が成り立つ。$M \geqq |f(p)|$ ならば M は $\mathbb{R}$ 上の関数 f の最大値であり，$m \leqq -|f(p)|$ ならば m は $\mathbb{R}$ 上の関数 f の最小値である。