

2026 年度

熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験問題

理学専攻・数学コース

専門科目

(2 題選択)

試験日：2025 年 8 月 19 日

試験時間：13 時 00 分～15 時 00 分（120 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子および解答紙の表紙を開いてはいけません。
2. 試験終了時まで退出できません。途中で気分が悪くなった場合などには、手を挙げて監督者に知らせてください。
3. 問題冊子には専門科目の問題を 4 題掲載しています。4 題のうち 2 題を選択して解答してください。
4. 解答紙は表紙を含め 3 枚あります。
5. 試験中に問題冊子または解答紙にページの落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所があれば、手を挙げて監督者に知らせてください。
6. すべての解答紙に必ず受験番号を書いてください。
7. 解答紙の所定の箇所に、解答する問題の番号を記入してください。
8. 問題冊子の余白等は適宜下書きに使用してもかまいません。
9. 解答しなかった問題の解答紙を含め、解答紙はすべて回収します。
10. 試験終了後、解答しなかった問題の解答紙を含め、全解答紙を問題番号順に揃えて、表紙と合わせて配布時と同じように左上をクリップで留めてください。
11. 解答紙は持ち帰ってはいけません。
12. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

(余 白)

6次対称群 S_6 の元 $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$ を σ とおく。 σ の中心化群

$Z_{S_6}(\sigma) = \{\tau \in S_6 \mid \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\}$ を考える。ただし、 $\sigma, \tau \in S_6$ の積 $\sigma\tau$ は、

$\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i))$ ($1 \leq i \leq 6$) で定める。以下の問いに答えよ。

(問1) $\rho \in S_6$ と巡回置換 $(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r) \in S_6$ に対し、

$$\rho(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r)\rho^{-1} = (\rho(k_1)\ \rho(k_2)\ \cdots\ \rho(k_r))$$

が成り立つことを示せ。

(問2) S_6 における σ の共役類の元の個数を求めよ。

(問3) $Z_{S_6}(\sigma)$ の位数を求めよ。

(問4) $Z_{S_6}(\sigma)$ のシロー3部分群を1つ求めよ。

(問5) $\{(1\ 2), (3\ 4), (5\ 6)\}$ で生成された S_6 の部分群は $Z_{S_6}(\sigma)$ の正規部分群であることを証明せよ。

\mathbb{R}^2 中の単位円周を S^1 とおく。 $x_0 = (1, 0) \in S^1$ をとる。以下の問いに答えよ。

(問 1) トーラス $S^1 \times S^1$ の基本群 $\pi_1(S^1 \times S^1, (x_0, x_0))$ を求めよ。

ただし $\pi_1(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$ であることは証明なしに使って良い。

(問 2) $S^1 \times S^1$ の普遍被覆空間が \mathbb{R}^2 と同型であることを示せ。

(問 3) $S^1 \times S^1$ の被覆空間で基本群が \mathbb{Z} と同型であるものを構成せよ。

複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{\sin z}{e^z - 1 - z}$$

で定める。 C を単位円 $|z| = 1$ とする。ただし、 C の向きは 0 を反時計回りに回る向きとする。以下の問いに答えよ。

(問1) 関数 $g(z) = e^z - 1 - z$ のマクローリン展開を求めよ。 $g(z)$ の零点 $z = 0$ の位数を求めよ。

(問2) $|z| = 1$ のとき、

$$\left| e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2} \right| \leq e - \frac{5}{2}$$

を示せ。また、(問1) で定義した $g(z)$ は円 C 内に $z = 0$ 以外の零点を持たないことを示せ。ただし、 $2.7 < e < 2.8$ であることを用いてもよい。

(問3) $\int_C f(z) dz$ の値を求めよ。

$G(x)$ は \mathbb{R} 上有界な実数値連続関数とする。 $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |G(x)|$ とおく。 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) および $f(x)$ は \mathbb{R}^d 上定義されたルベーグ可測な実数値関数とする。関数列 $\{f_n(x)\}$ はほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^d$ で $f(x)$ に収束するとする。 $G(x)$ と $f(x)$, $f_n(x)$ との合成関数をそれぞれ $(G \circ f)(x) = G(f(x))$, $(G \circ f_n)(x) = G(f_n(x))$ とおく。 \mathbb{R}^d のルベーグ可測集合 E のルベーグ測度を $|E|$ と表す。以下の問いに答えよ。

(問1) I を \mathbb{R} の開集合とする。 I の $G \circ f$ による逆像 $(G \circ f)^{-1}(I)$ は \mathbb{R}^d のルベーグ可測集合であることを示せ。

(問2) 関数列 $\{(G \circ f_n)(x)\}$ はほとんどすべての $x \in \mathbb{R}^d$ で $(G \circ f)(x)$ に収束することを示せ。

(問3) E は \mathbb{R}^d のルベーグ可測集合であり $|E| < \infty$ とするとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (G \circ f_n)(x) dx = \int_E (G \circ f)(x) dx$$

が成り立つことを示せ。

2026 年度

熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験

理学専攻・数学コース

専門科目
解答紙表紙

受験番号

選択問題の申告

科目	専門科目			
選択した問題	1	2	3	4

※試験終了までに、選択した問題を○で囲んで下さい。

2026 年度
熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験
理学専攻・数学コース

受験番号

専門科目

解答する問題の番号

※受験者はこの欄に
記入しないこと

点

裏面を使う場合は右の□にチェック（✓）をして下さい。
チェックが無い場合は、裏面を採点の対象としません。

2026 年度
熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験
理学専攻・数学コース

受験番号

専門科目

解答する問題の番号

※受験者はこの欄に
記入しないこと

点

裏面を使う場合は右の□にチェック（✓）をして下さい。
チェックが無い場合は、裏面を採点の対象としません。