

大学院理学専攻入学試験問題 (解答例) 物理

問題 1

問 (1)

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \left(-\frac{k}{r^3} \right) dr = -\frac{k}{2r^2}.$$

問 (2) 極座標でのラグランジアンは以下の通りである。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) + \frac{k}{2r^2}.$$

ラグランジュ方程式は以下のようになる。

$$m \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) = -\frac{k}{r^3}, \quad (1)$$

$$m \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) = 0. \quad (2)$$

問 (3) (2) から

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0.$$

であり、角運動量 L は保存する。また力学的エネルギーは以下のようになる。

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - \frac{k}{2r^2} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{2r^2}. \end{aligned}$$

問 (4) $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ と置くと、

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{L}{m r^2} = \frac{L}{m} u^2, \\ \frac{dr}{dt} &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}, \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \end{aligned}$$

これを (1) に代入し整理すると、

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{mk}{L^2} \right) u = 0.$$

問 (5) 円軌道では $r = \text{一定}$ (すなわち $u = \text{一定}$) かつ $\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$ となるので,

$$\left(1 - \frac{mk}{L^2}\right) u_0 = 0.$$

したがって $L^2 = mk$.

問 (6) 問 (1) と問 (3) より有効ポテンシャルは

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{2r^2} = \frac{L^2 - mk}{2mr^2}$$

となる。円軌道条件 $L^2 = mk$ のもとで有効ポテンシャルはゼロであり, 2階微分がゼロなので復元性がなく限界安定である。

問題2

問 (1) $\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{q}{4\pi|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \times \mathbf{B}.$

問 (2) $r = |\mathbf{r}|$ として, $\mathbf{G}_q = \int_{\Omega} \mathbf{g} dV = \int_{\Omega} \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{B} dV = \int_{\Omega} \frac{q}{4\pi r^3} \mathbf{r} dV \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}.$

問 (3) $\mathbf{G} = \int_{\Omega} \epsilon_0 \left(\sum_i \mathbf{E}_i \right) \times \mathbf{B} dV = \sum_i \int_{\Omega} \epsilon_0 \mathbf{E}_i \times \mathbf{B} dV = \sum_i \mathbf{G}_{q_i} = \sum_i \mathbf{0} = \mathbf{0}.$

問 (4) 電場に関するガウスの法則により, コンデンサーの内部の一樣な電場の強さ E は, $\epsilon_0 EA = Q$ より, $\mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \hat{\mathbf{z}}.$ よって, コンデンサー内部の電磁場の全運動量 \mathbf{G}_{in} は, $\mathbf{G}_{\text{in}} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} Al = \epsilon_0 \frac{Q}{\epsilon_0 A} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} Al = QlB\hat{\mathbf{y}}.$

問 (5) 抵抗線を流れる時刻 t の電流を $I(t)$ とすると, 抵抗線の受ける力 \mathbf{F} は $\mathbf{F} = I(t)\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}l = I(t)Bl\hat{\mathbf{y}}.$ 力積は $\mathbf{J} = \int_0^{\infty} \mathbf{F} dt = \int_0^{\infty} I(t)dt Bl\hat{\mathbf{y}} = BlQ\hat{\mathbf{y}}.$

問 (6) $B = \frac{m}{4\pi R^2} \times 2 = \frac{m}{2\pi R^2}.$ よって, $m = 2\pi R^2 B.$

問 (7) 抵抗線を流れる電流がまわりにつくる磁場 \mathbf{H}' はビオ・サバルの法則により, $\mathbf{H}' = \frac{1}{4\pi} \frac{I(t)l\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{I(t)l}{4\pi R^2} (-\hat{\mathbf{y}}).$ 細長い磁石の N 極が受ける力積 \mathbf{J}_N は,

$$\mathbf{J}_N = \int_0^{\infty} m\mathbf{H}' dt = -m \int_0^{\infty} \frac{I(t)l}{4\pi R^2} dt \hat{\mathbf{y}} = -\frac{ml\hat{\mathbf{y}}}{4\pi R^2} \int_0^{\infty} I(t)dt = -\frac{mlQ}{4\pi R^2} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{B}{2} lQ\hat{\mathbf{y}}.$$

S 極の受ける力積は, 同様に計算できて, $\mathbf{J}_S = -\frac{B}{2} lQ\hat{\mathbf{y}}.$

よって, 細長い磁石が受ける力積は $\mathbf{J}' = \mathbf{J}_N + \mathbf{J}_S = -BlQ\hat{\mathbf{y}}.$

問題3

問(1) M 個の区別しないエネルギー量子を、区別された N 個の振動子に分配する。その総数は、 M 個の玉と $N - 1$ 個の仕切り（区切り）を並べる方法と同様であり、

$$W = \binom{M+N-1}{N-1} = \frac{(M+N-1)!}{(N-1)!M!}. \quad (\text{答})$$

問(2)

$$\begin{aligned} S &= k_B \log W \approx k_B [(N+M) \log(N+M) - N \log N - M \log M] \\ &= k_B N \left\{ \left(1 + \frac{M}{N}\right) \log \left(1 + \frac{M}{N}\right) - \frac{M}{N} \log \frac{M}{N} \right\}. \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

問(3) $E = M\hbar\omega$ より M を E でおきかえ、

$$S = k_B N \left\{ \left(1 + \frac{E}{N\hbar\omega}\right) \log \left(1 + \frac{E}{N\hbar\omega}\right) - \frac{E}{N\hbar\omega} \log \left(\frac{E}{N\hbar\omega}\right) \right\}. \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{k_B}{\hbar\omega} \log \frac{E+N\hbar\omega}{E} \implies T = \left(\frac{k_B}{\hbar\omega} \log \frac{E+N\hbar\omega}{E} \right)^{-1} \\ \frac{\hbar\omega}{k_B T} &= \left(\log \frac{E+N\hbar\omega}{E} \right) \implies E = \frac{N\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}. \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

問(4) 問(1) で W を求めた方法と同様にして、

$$W_m = \frac{(M-m+N-2)!}{(M-m)!(N-2)!} \quad (\text{答})$$

である。 $W = \frac{(M+N-1)!}{M!(N-1)!}$ より、

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{W_m}{W} = \frac{(M+N-m-2)!(N-1)!M!}{(M+N-1)!(N-2)!(M-m)!} \\ &= \frac{(N-1)M(M-1)\cdots(M-m+1)}{(M+N-1)(M+N-2)\cdots(M+N-m-1)} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

となる。

問(5) $N \gg 1$, $m \ll M$ であるから, M および $M + N$ に比べて $m, 1$ を無視すれば,

$$p_m = \frac{N}{M + N} \left(\frac{M}{M + N} \right)^m.$$

問(3)の結果である $E = \frac{N\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$, すなわち, $M = \frac{N}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$ より,

$$\Rightarrow \frac{M}{N} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \Rightarrow \left(\frac{M + N}{M} \right) = \exp(\hbar\omega/k_B T) \text{ となるの}$$

で, 問(4)の p_m は,

$$p_m = \frac{N}{M + N} \left(\frac{M}{M + N} \right)^m = \frac{\exp(-m\hbar\omega/k_B T)}{1/\{1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)\}}.$$

従って, $\exp(-m\hbar\omega/k_B T)$ に比例することがわかる。 (答)

問題4

問(1) 運動量演算子は $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ と書ける。任意の関数 $f(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} (\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p})f(x) &= -i\hbar \frac{d}{dx}(xf(x)) - x \left(-i\hbar \frac{d}{dx}f(x) \right) \\ &= -i\hbar f(x) - i\hbar x \frac{df(x)}{dx} + i\hbar x \frac{df(x)}{dx} = -i\hbar f(x). \end{aligned}$$

したがって, $\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p} = [\hat{p}, \hat{x}] = -[\hat{x}, \hat{p}] = -i\hbar$.

問(2)

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\frac{1}{\sqrt{m\omega}} \hat{p} - i\sqrt{m\omega} \hat{x} \right), \quad (\text{A1})$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\frac{1}{\sqrt{m\omega}} \hat{p} + i\sqrt{m\omega} \hat{x} \right). \quad (\text{A2})$$

$$(\text{A1}) - (\text{A2}) \text{ より } \hat{a} - \hat{a}^\dagger = -2i \frac{\sqrt{m\omega}}{\sqrt{2\hbar}} \hat{x}.$$

$$\text{したがって, } \hat{x} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (\text{A3}) \quad (\text{答})$$

$$\text{同様に } (\text{A1}) + (\text{A2}) \text{ より } \hat{a} + \hat{a}^\dagger = 2 \frac{1}{\sqrt{2\hbar}\sqrt{m\omega}} \hat{p}.$$

$$\text{したがって, } \hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (\text{A4}) \quad (\text{答})$$

問(3) 交換関係 (A1)(A2) より

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{a}^\dagger f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\frac{1}{\sqrt{m\omega}} \hat{p} - i\sqrt{m\omega} \hat{x} \right) \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\frac{1}{\sqrt{m\omega}} \hat{p} + i\sqrt{m\omega} \hat{x} \right) f(x) \\ &= \frac{1}{2\hbar} \left(\frac{1}{m\omega} \hat{p}^2 + m\omega \hat{x}^2 + i(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}) \right) f(x) \\ &= \frac{1}{2\hbar} \left(\frac{1}{m\omega} \hat{p}^2 + m\omega \hat{x}^2 + i[\hat{p}, \hat{x}] \right) f(x) \\ &= \frac{1}{2\hbar} \left(\frac{1}{m\omega} \hat{p}^2 + m\omega \hat{x}^2 + \hbar \right) f(x), \\ \hat{a}\hat{a}^\dagger &= \frac{1}{2\hbar} \left(\frac{1}{m\omega} \hat{p}^2 + m\omega \hat{x}^2 + \hbar \right). \end{aligned}$$

$$\text{同様にして } \hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2\hbar} \left(\frac{1}{m\omega} \hat{p}^2 + m\omega \hat{x}^2 - \hbar \right).$$

$$\text{したがって, } [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2\hbar} 2\hbar = 1. \quad (\text{答})$$

問 (4) $\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} = 2\frac{1}{2\hbar} \left(\frac{1}{m\omega} \hat{p}^2 + m\omega \hat{x}^2 \right) = \frac{2}{\hbar\omega} \left(\frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \right),$
 $\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\omega}{2}$
 $= \hat{N}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (\text{答})$

問 (5) $[\hat{a}, \hat{H}] = \hat{a}\hat{H} - \hat{H}\hat{a} = \left(\hbar\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\omega}{2}\hat{a} \right) - \left(\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \frac{\hbar\omega}{2}\hat{a} \right) = \hbar\omega\hat{a}. \quad \dots (*)$
 同様にして $[\hat{a}^\dagger, \hat{H}] = -\hbar\omega\hat{a}^\dagger. \quad (\text{答})$

問 (6) ハイゼンベルグ表示は (*) を用いると

$$i\hbar \frac{d\hat{a}}{dt} = [\hat{a}, \hat{H}] = \hbar\omega\hat{a}, \quad i\hbar \frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = [\hat{a}^\dagger, \hat{H}] = -\hbar\omega\hat{a}^\dagger,$$

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -i\omega\hat{a}, \quad \hat{a}(t) = \hat{a}_0 e^{-i\omega t}. \quad (\text{答})$$

同様にして, $\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}_0^\dagger e^{i\omega t}. \quad (\text{答})$

問 (7) ハイゼンベルグ表示より $\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{x}], \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{p}].$

ここで $[\hat{H}, \hat{p}] = \hat{H}\hat{p} - \hat{p}\hat{H} = \left(\frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \right) \hat{p} - \hat{p} \left(\frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \right)$
 $= \frac{m\omega^2}{2} (\hat{x}^2 \hat{p} - \hat{p} \hat{x}^2) = \frac{m\omega^2}{2} \{ \hat{x}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) + (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\hat{x} \}$
 $= \frac{m\omega^2}{2} \{ \hat{x}[\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x} \} = \frac{m\omega^2}{2} \{ \hat{x}i\hbar + i\hbar\hat{x} \} = i\hbar m\omega^2 \hat{x}.$

したがって $\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \overline{[\hat{H}, \hat{p}]} = \frac{i}{\hbar} i\hbar m\omega^2 \bar{x} = -m\omega^2 \bar{x}.$

同様に $\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \overline{[\hat{H}, \hat{x}]} = \frac{\bar{p}}{m}, \quad \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\bar{x}}{dt} \right) = m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -m\omega^2 \bar{x}$

より, ニュートンの運動方程式は

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -m\omega^2 \bar{x}$$

と導かれる。