問題 1 原点 O から，距離 r の 3 乗に反比例する引力 $F = -\dfrac{k}{r^3}$ $(k > 0)$ を受ける質量 m の質点の運動を考える。以下の問に答えよ。

問 (1) この引力によるポテンシャルを，無限遠を基準として求めよ。

問 (2) 質点の運動方程式を 2 次元極座標 (r, θ) で書け。

問 (3) 角運動量 $L = mr^2 \dfrac{d\theta}{dt}$ が保存することを示し，力学的エネルギー E を θ を用いず L を含んだ形で表せ。

問 (4) 質点の軌道を考えるために，r を θ の関数とみなす。$u(\theta) = \dfrac{1}{r(\theta)}$ と置き，問 (2) の運動方程式から $u(\theta)$ に関する微分方程式を導け。

問 (5) 円軌道（$r =$ 一定）になるための L に関する条件を示せ。

問 (6) 問 (5) の円軌道の安定性について，有効ポテンシャル $V_{\text{eff}}(r)$ を使って議論せよ。ここで，有効ポテンシャルとは力学的エネルギー E から次のように計算されるものである。

$$V_{\text{eff}}(r) = E - \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

問題 2 真空中で x 方向の一様な静磁場下（磁束密度 $\boldsymbol{B}$）において，点電荷 q が座標の原点 O に置かれている（図 1）。SI 単位系を用い，真空中の誘電率を ϵ_0，透磁率を μ_0 とする。ベクトルについては必要であれば基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ を用いて，以下の問に答えよ。

問 (1) $\boldsymbol{B}$ と点電荷のつくる静電場 $\boldsymbol{E}$ によって生じる，位置 $\boldsymbol{r}$ での電磁場の運動量密度 $\boldsymbol{g} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ を q, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{B}$ を用いて表せ。

問 (2) $\boldsymbol{g}$ を全空間 Ω にわたり体積積分することにより，電磁場の全運動量 $\boldsymbol{G}_q$ を求めよ。

図 2 のように，xy 平面に平行な帯電した平行板コンデンサー（間隔 l，各板の面積 A，上板の電荷 $-Q$，下板の電荷 Q）が真空中，一様な磁場（$\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{x}}$）中で原点 O を中心にして固定されている。

問 (3) 平行板コンデンサー内外の電場は上板の電荷と下板の電荷により作られている。これらの電荷を点電荷 q_i $(i = 1, 2, \cdots)$ の集まりと考えると，平行板コンデンサーの電場は点電荷 q_i のつくる電場 $\boldsymbol{E}_i$ の重ね合わせである。このことにより，平行板コンデンサー内外の電場と一様磁場によって生じる全空間 Ω の電磁場の全運動量 $\boldsymbol{G}$ が $\boldsymbol{0}$ であることを示せ。

問 (4) l が十分小さく平行板コンデンサーの上下の板に挟まれた薄い領域 V_{in} 内の電場は一様として，V_{in} 内の電磁場の全運動量 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{in}}$ を A, Q, B, l の中で必要なものを用いて表せ。

問 (5) 平行板間で z 軸に沿って抵抗線を接続し，コンデンサーをゆっくりと放電させた。時刻 t に抵抗線を流れる電流 $I(t)$ は，磁場からローレンツ力を受ける。放電しきるまでに抵抗線が受ける力積 $\boldsymbol{J}$ を A, Q, B, l の中で必要なものを用いて表せ。

問 (5) で考えた $I(t)$ により磁場が生じる。それが原点 O 付近の一様磁場（$\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{x}}$）を作っている磁石に力積を及ぼす。ここで，簡単のため図 3 のように非常に細長い磁石を考えて，その磁石の先端が点状の磁荷 $\pm m$ を持つとする。$\pm m$ は平行板コンデンサーから十分遠い点 $\pm \boldsymbol{R} = \mp R\hat{\boldsymbol{x}}$ にそれぞれあるとする。

問 (6) m を B と R で表せ。

問 (7) $I(t)$ によって生じる磁場からこの $\pm m$ の受ける力積の和 $\boldsymbol{J}'$ を A, Q, B, l, R の中で必要なものを用いて表せ。なお，導出には，電流 I の回路の微小部分 $d\boldsymbol{s}$ から $\boldsymbol{r}'$ だけ離れた点に作る磁場は $d\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{I d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|^3}$ であること（ビオ・サバールの法則）を用いよ。

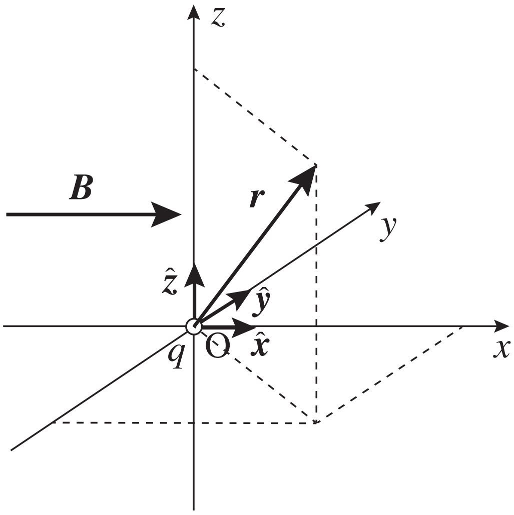

図 1

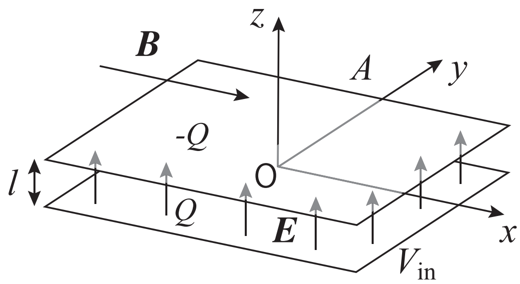

図 2

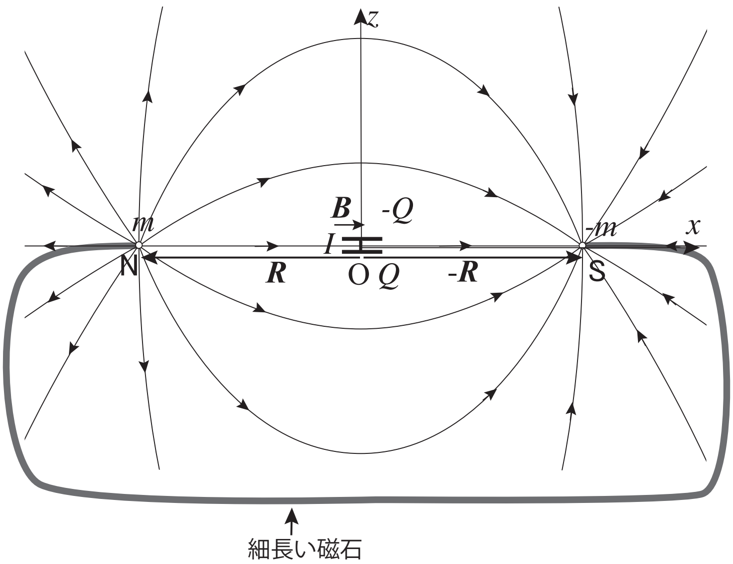

図 3

問題３ N 個の調和振動子からなる系を考える。調和振動子を量子論的に扱うと，その固有エネルギーは，ゼロ点エネルギーを考慮しない場合，$\varepsilon = n\hbar\omega$ と表される。ただし，n は量子数であり 0 以上の整数，ω は振動子の固有角振動数，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ （h はプランク定数) である。k_{B} をボルツマン定数として以下の問に答えよ。

問 (1) N 個の調和振動子のうち，i 番目の振動子のエネルギーを $n_i\hbar\omega$（n_i は 0 以上の整数）と表す。系の全エネルギー E は，各振動子のエネルギーの和で与えられ，$E = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} n_i\hbar\omega$ である。いま，系が熱平衡状態にあり，$E = M\hbar\omega$ （M はある正の整数) である状況を考える。全エネルギー $M\hbar\omega$ を， エネルギー量子 $\hbar\omega$ を単位として，N 個の振動子に分配する仕方を考えることにより，微視的状態の総数 W を求めよ。

問 (2) N，$M \gg 1$ のとき，$K \gg 1$ の整数に対して成り立つスターリングの公式 $\log K! \approx K\log K - K$ を適用すると，ボルツマンの原理による系のエントロピー S は，

$$S = Nk_{\mathrm{B}}\left\{\left(1+\frac{M}{N}\right)\log\left(1+\frac{M}{N}\right) - \frac{M}{N}\log\left(\frac{M}{N}\right)\right\}$$

で与えられることを示せ。

問 (3) 前問のエントロピーの式を，E を用いて書き換えよ。さらに，S と E と系の温度 T の間に成り立つ熱力学関係式を利用して，E を T の関数として表せ。

問 (4) 系を構成する振動子のうち，一つの振動子に着目する。その振動子のエネルギーがある整数 m（ただし，$0 \leq m \leq M$）を用いて，$m\hbar\omega$ で与えられているとする。着目した振動子以外の $N-1$ 個の振動子のとり得る微視的状態の数を求めよ。さらに，この結果と，問 (1) で求めた W を用いることにより，着目した一つの振動子が，$m\hbar\omega$ のエネルギーをとる確率 p_m を求めよ。

問 (5) $N \gg 1$ および $m \ll M$ の条件と，問 (3) で得られた解を利用することにより，問 (4) で得られた p_m が $\exp\left(-\dfrac{m\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$ に比例することを示せ。

問題４ 質量 m，固有角振動数 ω をもつ１次元調和振動子の量子力学的なハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

で与えられる。ただし，$\hat{x}$，$\hat{p}$ はそれぞれ位置演算子，運動量演算子である。以下の問に答えよ。

問 (1) $\hat{x}$ と $\hat{p}$ の交換関係を導け。

問 (2) 演算子 $\hat{a} \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{m\omega}}\,\hat{p} - \mathrm{i}\sqrt{m\omega}\,\hat{x}\right)$ としたとき，$\hat{x}$ と $\hat{p}$ を $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ を用いて表せ。なお，演算子 $\hat{a}^\dagger$ は $\hat{a}$ のエルミート共役である。

問 (3) 交換関係 $[\hat{a}\,, \hat{a}^\dagger]$ を計算せよ。

問 (4) 演算子 $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ としたとき，ハミルトニアン $\hat{H}$ を $\hat{N}$ を用いて表せ。

問 (5) 交換関係 $[\hat{a}\,, \hat{H}]$ と $[\hat{a}^\dagger, \hat{H}]$ を計算せよ。

問 (6) 上記の $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ に対してハイゼンベルグ表示を用いてハイゼンベルグの運動方程式を解き，$\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ それぞれの時間発展を求めよ。ただし，$t = 0$ での各々の演算子を $\hat{a}_0$, $\hat{a}_0{}^\dagger$ とする。$\hat{a}$ に対するハイゼンベルグの運動方程式は $\mathrm{i}\hbar\dfrac{d\hat{a}}{dt} = [\hat{a}, \hat{H}]$ と書ける。

問 (7) 期待値 $\bar{x}$ に関する微分方程式が１次元調和振動子に関するニュートンの運動方程式と同形であることを示せ。