2026 年度
熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験

機械システム工学専攻

（機械工学教育プログラム・機械システム教育プログラム）

工業数学

試験日：2025 年 8 月 19 日
試験時間：9:00～10:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 試験終了時まで退出できません。途中で気分が悪くなった場合などには，静かに手を挙げて監督者に知らせてください。
3. この問題・解答冊子は「工業数学」の問題および解答用紙です。
4. この冊子はこの表紙を含めて全部で 5 ページあります。試験中にこの冊子の落丁，乱丁あるいは印刷の不鮮明な箇所があれば，静かに手を挙げて監督者に知らせてください。
5. 表紙を除く全てのページの所定の欄に受験番号を書いてください。
6. 解答は所定の解答欄に書いてください。所定の解答欄以外に解答を書いた場合，採点されません。
7. 試験終了後，この冊子を持ち帰ってはいけません。

科目名	問題番号　（ページ数）	必答・選択の別
工業数学	問 1～問 4　（4 ページ）	全問必答

受験番号

工業数学（１／４）

問 1（25 点／ 100 点）

次の問いに答えなさい。

（1）以下の連立 1 次方程式が解を持つための定数 a, b, c, d の満たすべき条件を求めなさい。また，そのときの解を求めなさい。

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3w = a \\ x + 2y + z - 2w = b \\ 2x + 3y - z + w = c \\ \quad 3x + 5y - w = d \end{cases}$$

（2）a を実定数とする。以下の行列の逆行列を求めなさい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 \\ a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \end{pmatrix}$$

（3）以下の行列の行列式を求めなさい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

＜解答欄＞

（1）$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ とおき，拡大係数行列を $\tilde{A} = (A, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 1 & -2 & b \\ 2 & 3 & -1 & 1 & c \\ 3 & 5 & 0 & -1 & d \end{pmatrix}$ と表す。解を持つことの必要十分条件は $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A}$ である。$\tilde{A}$ を行基本変形すると

$$\tilde{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 3 & -5 & b-a \\ 0 & 1 & 3 & -5 & c-2a \\ 0 & 2 & 6 & -10 & d-3a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 8 & 2a-b \\ 0 & 1 & 3 & -5 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-a-2b \end{pmatrix}$$

裏面を使う場合は右の□にチェック（√）をしてください。チェックがない場合は，裏面を採点の対象としません。 異なる問題の解答をこの用紙（裏面を含む）に書いてはいけません。	□

※ 受験者はこの欄に
記入しないこと

点

受験番号

となる。よって $\begin{cases} c-a-b=0 \\ d-a-2b=0 \end{cases}$ が求める条件である。このとき，

$$\begin{cases} x=(2a-b)+5s-8t \\ y=(b-a)-3s+5t \\ z=s \\ w=t \end{cases}$$

となる。ただし s,t は任意定数である。

（2）行列に対する行基本変形を行うことにより，求める逆行列は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -2a & 1 & 0 \\ -a^3 & 3a^2 & -3a & 1 \end{pmatrix}$$

（3）以下のように，行基本変形を行うと上三角行列になり，行列式は 1 であることが分かる。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

受験番号

工業数学（２／４）

問 2（25 点／ 100 点）

行列 A，ベクトル $\boldsymbol{v}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定める。次の問いに答えなさい。

（1）行列 A の固有値をすべて求め，それぞれの固有値に対応する 1 次独立な固有ベクトルを重複度の個数だけ求めなさい。

（2）ベクトル $\boldsymbol{v}$ を (1) で求めた固有ベクトルの 1 次結合の形で表しなさい。

（3）正の整数 n に対して $A^n\boldsymbol{v}$ を求めなさい。

＜解答欄＞

（1）行列 A の固有多項式は $\det(tI - A) = (t-2)(t+1)^2$ である。固有値は $\lambda_1 = 2$ (重複度 1) および $\lambda_2 = -1$ (重複度 2) である。$\lambda_1 = 2$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1$，$\lambda_2 = -1$ に対応する 2 つの 1 次独立な固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ とおくと，

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と取れる。ただし，これ以外にも固有ベクトルの取り方がある。

（2）$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3$ となる実数 x, y, z を求めればよく，答えは $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ である。ゆえに，

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表せる。ただし，(1) の解答によって，これ以外の解答もある。

（3）$A^n\boldsymbol{v}$ を計算すると

$$\begin{aligned} A^n\boldsymbol{v} &= \frac{1}{3}A^n\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{3}A^n\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{3}A^n\boldsymbol{v}_3 \\ &= \frac{1}{3}2^n\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{3}(-1)^n\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{3}(-1)^n\boldsymbol{v}_3 \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n \\ 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

※ 受験者はこの欄に記入しないこと
点

裏面を使う場合は右の□にチェック（√）をしてください。チェックがない場合は，裏面を採点の対象としません。 異なる問題の解答をこの用紙（裏面を含む）に書いてはいけません。	□

受験番号

工業数学（３／４）

問 3（25 点／ 100 点）

次の問いに答えなさい。

（1）極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left\{\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{\pi}{4}\right\}$ を求めなさい。

（2）関数 $y=\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{7\sin x+3\cos x}{7\cos x-3\sin x}\right)$ を微分しなさい。

（3）広義積分 $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}$ を求めなさい。

＜解答欄＞

（1）$\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x\in(-1,1))$ であるから,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\left\{\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{\pi}{4}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)-\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}x}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\right)'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\\ &= 1\end{aligned}$$

となる。または,

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{\pi}{4}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

であるから, ロピタルの定理より,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\left\{\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{\pi}{4}\right\} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}x})^2}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2}}\\ &= 1\end{aligned}$$

を得る。

裏面を使う場合は右の□にチェック（√）をしてください。チェックがない場合は，裏面を採点の対象としません。 異なる問題の解答をこの用紙（裏面を含む）に書いてはいけません。	□

※ 受験者はこの欄に記入しないこと
点

2026 年度
熊本大学大学院自然科学教育部 (博士前期課程) 入学試験
機械システム工学専攻（機械工学教育プログラム・機械システム教育プログラム）
工業数学

受験番号

（2）

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{1+\left(\frac{7\sin x+3\cos x}{7\cos x-3\sin x}\right)^2} \times \left(\frac{7\sin x+3\cos x}{7\cos x-3\sin x}\right)' \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{7\sin x+3\cos x}{7\cos x-3\sin x}\right)^2} \times \frac{(7\cos x-3\sin x)^2+(7\sin x+3\cos x)^2}{(7\cos x-3\sin x)^2} \\
&= \frac{(7\cos x-3\sin x)^2+(7\sin x+3\cos x)^2}{(7\cos x-3\sin x)^2+(7\sin x+3\cos x)^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

（3）$2<a<b<3$ とする。このとき

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-2)(3-x)}} &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}} \\
&= \Big[\mathrm{Sin}^{-1}(2x-5)\Big]_a^b \\
&= \mathrm{Sin}^{-1}(2b-5)-\mathrm{Sin}^{-1}(2a-5)
\end{aligned}
$$

となる。$a\to 2,\ b\to 3$ として π を得る。

※ 受験者はこの欄に記入しないこと
点

裏面を使う場合は右の□にチェック（√）をしてください。チェックがない場合は，裏面を採点の対象としません。異なる問題の解答をこの用紙（裏面を含む）に書いてはいけません。	□

受験番号

工業数学（４／４）

問 4（25 点／ 100 点）

次の問いに答えなさい。

（1）関数 $z = f(x, y)$ に対して，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ のとき，以下の等式が成り立つことを示しなさい。

$$z_x^2 + z_y^2 = z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2$$

ただし，$z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ であり，z_y，z_r，z_θ も同様とする。

（2）重積分

$$\iint_D \cos(x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めなさい。ただし，$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y \leqq x \leqq \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\}$ である。

＜解答欄＞

（1）2 変数関数の連鎖法則より

$$z_r = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta, \quad z_\theta = -r z_x \sin\theta + r z_y \cos\theta$$

となることから

$$\begin{aligned} z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2 &= z_x^2 \cos^2\theta + z_y^2 \sin^2\theta + 2 z_x z_y \cos\theta \sin\theta \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\left(r^2 z_x^2 \sin^2\theta + r^2 z_y^2 \cos^2\theta - 2r^2 z_x z_y \cos\theta\sin\theta \right) \\ &= z_x^2 \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + z_y^2 \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) \\ &= z_x^2 + z_y^2 \end{aligned}$$

を得る。

（2）積分領域 D は x 単純領域として $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ 0 \leqq y \leqq x \right\}$ とも書ける。よって，

$$\begin{aligned} \iint_D \cos(x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(\int_0^x \mathrm{d}y \right) \cos(x^2)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos(x^2)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

裏面を使う場合は右の□にチェック（√）をしてください。チェックがない場合は，裏面を採点の対象としません。 異なる問題の解答をこの用紙（裏面を含む）に書いてはいけません。	□

※ 受験者はこの欄に記入しないこと 点

2026 年度
熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験

機械システム工学専攻
（機械工学教育プログラム・機械システム教育プログラム）

専門科目

熱力学

試験日：2025 年 8 月 19 日
試験時間：10:50〜11:40

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 試験終了時まで退出できません。途中で気分が悪くなった場合などには，静かに手を挙げて監督者に知らせてください。
3. この問題・解答冊子は「熱力学」の問題および解答用紙です。
4. この冊子はこの表紙を含めて全部で 3 ページあります。試験中にこの冊子の落丁，乱丁あるいは印刷の不鮮明な箇所があれば，静かに手を挙げて監督者に知らせてください。
5. 表紙を除く全てのページの所定の欄に受験番号を書いてください。
6. 解答は所定の解答欄に書いてください。所定の解答欄以外に解答を書いた場合，採点されません。
7. 試験終了後，この冊子を持ち帰ってはいけません。

科目名	問題番号　（ページ数）	必答・選択の別
熱力学	問 1，問 2　（2 ページ）	全問必答

受験番号

熱力学（１／２）

問 1（60 点／100 点）

質量 $m = 0.50$ kg，圧力 $p_1 = 800$ kPa，体積 $V_1 = 0.10$ m^3 の理想気体に熱を加えたところ，$pV^{1.2} =$ 一定（p：圧力[Pa], V：体積[m^3]）の関係式にしたがって膨張し，体積が $V_2 = 0.40$ m^3 まで増加した。このとき，次の（１）～（３）の問いに答えよ。ただし，閉じた系における準静的過程とし，この理想気体の気体定数を $R = 287$ J/(kg·K)，比熱比を $\kappa = 1.4$ とする。

（１） 理想気体がなした仕事 W_{12} [kJ]を求めよ。

<解答欄>

（２） 理想気体に加えられた熱量 Q_{12} [kJ]を求めよ。

<解答欄>

（３） 理想気体のエントロピーの変化量ΔS [J/K]を求めよ。

<解答欄>

※ 受験者はこの欄に
記入しないこと

点

受験番号

熱力学（２／２）

問 2（40 点／100 点）

図 1 に示すように，温度 T_1 [K]と温度 T_2 [K]（$T_1 > T_2$）の熱源間でカルノー熱機関を作動させ，この動力でカルノー冷凍機を動かして，温度 T_3 [K]（$T_3 < T_2$）の熱源から温度 T_2 の熱源に熱を移動させる。カルノー熱機関に供給される熱量が Q_a [J]であるとき，次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１） カルノー冷凍機の成績係数 ε_R を求めよ。

＜解答欄＞

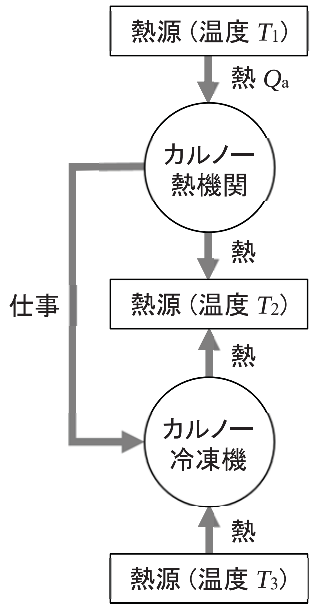


図 1

（２） カルノー冷凍機が温度 T_3 の熱源から奪う熱量 Q_b [J]を求めよ。

＜解答欄＞

※ 受験者はこの欄に記入しないこと
点

（解答例）

問 1

（**1**）仕事の定義より，$pV^{1.2} =$ 一定なので，

$$W_{12} = \int_1^2 pdV = p_1V_1^{1.2}\int_1^2 \frac{dV}{V^{1.2}} = \frac{p_1V_1^{1.2}}{-0.2}(V_2^{-0.2} - V_1^{-0.2}) = \frac{800\times10^3\times0.10^{1.2}}{-0.2}(0.40^{-0.2} - 0.10^{-0.2}) = 96857$$

$\therefore$ $W_{12} = 96.9$ kJ

（**2**）熱力学第一法則より，

$$Q_{12} = W_{12} + \mathit{\Delta} U = W_{12} + mc_v(T_2 - T_1) = W_{12} + m\frac{R}{\kappa - 1}(T_2 - T_1)$$

ここで，

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{mR} = \frac{800\times10^3\times0.10}{0.50\times287} = 557.5$$

$pV^{1.2} =$ 一定より $TV^{0.2} =$ 一定なので，

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{0.2} = 557.5\times\left(\frac{0.10}{0.40}\right)^{0.2} = 422.5$$

したがって，

$$Q_{12} = W_{12} + m\frac{R}{\kappa - 1}(T_2 - T_1) = 96857 + 0.50\times\frac{287}{1.4 - 1}\times(422.5 - 557.5) = 48426$$

$\therefore$ $Q_{12} = 48.4$ kJ

（**3**）理想気体のエントロピー変化なので，

$$\mathit{\Delta} S = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + pdV}{T} = mc_v\int_1^2 \frac{dT}{T} + mR\int_1^2 \frac{dV}{V} = mR\left\{\frac{1}{\kappa - 1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right\}$$

$$= 0.50\times287\times\left\{\frac{1}{1.4 - 1}\ln\left(\frac{422.5}{557.5}\right) + \ln\left(\frac{0.40}{0.10}\right)\right\} = 99.46$$

$\therefore$ $\Delta S = 99.5$ J/K

問 2

（1）ε_{R}の定義とエネルギー保存則より，カルノー冷凍機が受け取る熱量を Q_{L}，捨てる熱量を Q_{H} とすると，

$$\varepsilon_{\mathrm{R}} = \frac{Q_{\mathrm{L}}}{W} = \frac{Q_{\mathrm{H}} - W}{W} = \frac{Q_{\mathrm{H}}}{W} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{T_3}{T_2}} - 1 = \frac{T_2}{T_2 - T_3} - 1 = \frac{T_3}{T_2 - T_3}$$

（2）カルノー熱機関がなす仕事を W とすると，

$$W = Q_{\mathrm{a}}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \qquad ①$$

（1）より，$Q_{\mathrm{L}} = Q_{\mathrm{b}}$ なので，

$$W = Q_{\mathrm{b}}\left(\frac{T_2 - T_3}{T_3}\right) \qquad ②$$

式①，式②より，

$$Q_{\mathrm{a}}\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1}\right) = Q_{\mathrm{b}}\left(\frac{T_2 - T_3}{T_3}\right)$$

したがって，

$$Q_{\mathrm{b}} = Q_{\mathrm{a}}\frac{T_3(T_1 - T_2)}{T_1(T_2 - T_3)}$$

2026 年度

熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験

機械システム工学専攻

（機械工学教育プログラム・機械システム教育プログラム）

専門科目

流体力学

試験日：2025 年 8 月 19 日
試験時間：12:40～13:30

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 試験終了時まで退出できません。途中で気分が悪くなった場合などには，静かに手を挙げて監督者に知らせてください。
3. この問題・解答冊子は「流体力学」の問題および解答用紙です。
4. この冊子はこの表紙を含めて全部で 3 ページあります。試験中にこの冊子の落丁，乱丁あるいは印刷の不鮮明な箇所があれば，静かに手を挙げて監督者に知らせてください。
5. 表紙を除く全てのページの所定の欄に受験番号を書いてください。
6. 解答は所定の解答欄に書いてください。所定の解答欄以外に解答を書いた場合，採点されません。
7. 試験終了後，この冊子を持ち帰ってはいけません。

科目名	問題番号　　（ページ数）	必答・選択の別
流体力学	問 1　　（2 ページ）	全問必答

2026 年度
熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験
機械システム工学専攻（機械工学教育プログラム・機械システム教育プログラム）
専門科目

受験番号

流体力学（１／２）

問 1（100 点／100 点）

図 1 に示すように，断面積 A のノズルから密度 ρ の液体が速度 u で大気圧 p_{a} の大気中に噴出している。この噴流は水平面内で滑らかな曲面板に沿って曲げられている。曲面板が固定されているとき，噴流は曲面板の右端から速度 u_{e}，角度 θ $(0<\theta<\pi)$ で流出している。エネルギー損失は無視できるものとして，以下の（１）～（３）の問いに答えなさい。

（１）ノズルから噴出する液体の体積流量 Q と質量流量 W をそれぞれ求めなさい。

（２）曲面板が固定されている場合，
(2.1) このとき，$u_{\mathrm{e}}=u$ であることを説明しなさい。
(2.2) 噴流が曲面板に及ぼす力 F の x, y 方向成分 F_x と F_y をそれぞれ求めなさい。
(2.3) 噴流が曲面板に及ぼす力 F の大きさおよび F が x 軸となす角 α をそれぞれ求めなさい。さらに，F の向きを図 1 中に図示しなさい。

（次ページに小問（３）がつづきます）

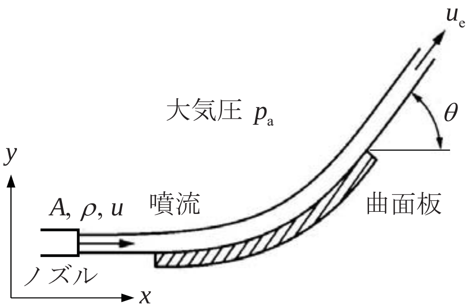


図 1　曲面板に沿って曲がる噴流

＜解答欄＞

（１）
体積流量と質量流量は

$$Q = Au,\ W = \rho Au$$

(2.1)
エネルギー損失・授受がないことから，ノズル出口と曲面板右端との間でベルヌーイの式を立てる。

$$p_{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\rho u_{\mathrm{e}}^2$$

したがって $u_{\mathrm{e}} = u$

(2.2)
曲面板に沿って流れる流体を含むよう検査体積をとり，x 方向，y 方向それぞれに運動量の式を立てる。

$$F_x = \rho Q u(1-\cos\theta) = \rho A u^2 (1-\cos\theta) \qquad \cdots (1)$$

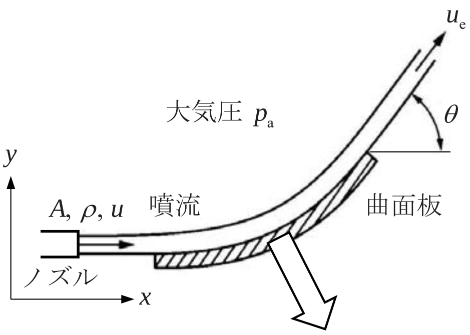
$$F_y = -\rho Q u \sin\theta = -\rho A u^2 \sin\theta$$

(2.3)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \rho Q u \sqrt{2(1-\cos\theta)} = \rho A u^2 \sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2\rho A u^2 \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x} = -\tan^{-1}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -\frac{\pi-\theta}{2}$$

力の向きは右図の太い白抜きの矢印のとおり。



＜解答例＞ 曲面板に及ぼす力の向き

※ 受験者はこの欄に
記入しないこと

点

2026 年度
熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験
機械システム工学専攻（機械工学教育プログラム・機械システム教育プログラム）
専門科目

受験番号

流体力学（２／２）

問１のつづき

（３）曲面板が噴流と同じ向きに速度 v $(0<v<u)$ で移動している場合，

(3.1) このとき，噴流が曲面板に及ぼす力の x 方向成分 F_x を求めなさい。

(3.2) 曲面板が噴流から受ける動力 P を求めなさい。

(3.3) 曲面板が噴流から受ける動力が最大となるときの曲面板の速度 v と最大動力 $P_{\max}$ をそれぞれ求めなさい。

(3.4) 曲面板が噴流から受ける動力 P は，曲面板に沿って流れる噴流の単位時間当たりの運動エネルギーの減少量 ΔE に等しいことを $A=10\,\mathrm{cm}^2$, $u=30\,\mathrm{m/s}$, $v=10\,\mathrm{m/s}$, $\theta=\pi/3$ $(\theta=60^\circ)$, $\rho=1000\,\mathrm{kg/m^3}$ を例に示しなさい。必要であれば，三角形の余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ を用いなさい。

＜解答欄＞

(3.1)

曲面板の運動座標系で観察すると，液体は曲面板に相対速度 $(u-v)$ で流出入する。したがって，式(1)より

$$F_x=\rho A(u-v)^2(1-\cos\theta)$$

(3.2)

$$P=F_x v=\rho A(u-v)^2 v(1-\cos\theta) \qquad \cdots (2)$$

(3.3)

P が最大のとき，$\mathrm{d}P/\mathrm{d}v=0$ となる。

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v}=\rho A(1-\cos\theta)(u-v)(u-3v)=0$$

よって，P が最大となるのは

$$v=\frac{1}{3}u \qquad \cdots (3)$$

式(3)を式(2)に代入して

$$P_{\max}=\frac{4}{27}\rho Au^3(1-\cos\theta) \qquad \cdots (4)$$

(3.4)

式(2)に各値を代入して(または $v=u/3$ なので式(4)より)

$$P=2\,000\,\mathrm{W}$$

曲面板に到達する（流出入する）液体の質量流量は

$$W'=\rho A(u-v)=20\,\mathrm{kg/s}$$

曲面板右端から流出する噴流の絶対速度 c は，曲面板右端における速度三角形から

$$c^2=v^2+(u-v)^2-2v(u-v)\cos(\pi-\theta)=700\,\mathrm{m^2/s^2}$$

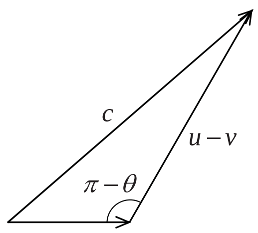
噴流の運動エネルギーの減少量は，単位時間当たり

$$\Delta E=\frac{1}{2}W'\left(u^2-c^2\right)=2\,000\,\mathrm{W}$$

以上から，提示された条件下で

$$P=\Delta E$$

が成り立つことを示した。



補図 曲面板右端における噴流の速度三角形

※ 受験者はこの欄に記入しないこと
点

機械システム工学専攻

（機械工学教育プログラム・機械システム教育プログラム）

専門科目

材料力学

試験日：2025 年 8 月 19 日
試験時間：13:50～14:40

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 試験終了時まで退出できません。途中で気分が悪くなった場合などには，静かに手を挙げて監督者に知らせてください。
3. この問題・解答冊子は「材料力学」の問題および解答用紙です。
4. この冊子はこの表紙を含めて全部で 3 ページあります。試験中にこの冊子の落丁，乱丁あるいは印刷の不鮮明な箇所があれば，静かに手を挙げて監督者に知らせてください。
5. 表紙を除く全てのページの所定の欄に受験番号を書いてください。
6. 解答は所定の解答欄に書いてください。所定の解答欄以外に解答を書いた場合，採点されません。
7. 試験終了後，この冊子を持ち帰ってはいけません。

科目名	問題番号　（ページ数）	必答・選択の別
材料力学	問 1，問 2　（2 ページ）	全問必答

2026 年度
熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験
機械システム工学専攻（機械工学教育プログラム・機械システム教育プログラム）
専門科目

受験番号

材料力学（1／2）

解答例

問 1（50 点／100 点）

図 1 のように，壁面に接合された丸棒 AB に丸棒 BC が接合されている。丸棒 AB と丸棒 BC の接合部と，丸棒 BC の右端に，それぞれ反対の向きに荷重 P が作用している。それぞれの丸棒の長さを a，ヤング率を E，丸棒 AB の直径を $2d$，丸棒 BC の直径を d とするとき，以下の問いに答えよ。

（1）丸棒 AB と丸棒 BC に作用する応力 σ_{AB} と σ_{BC} を求めよ。

（2）荷重によって生じる B 点と C 点の x 方向の変位 δ_B と δ_C を求めよ。

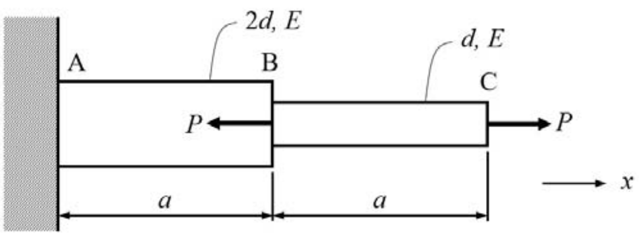


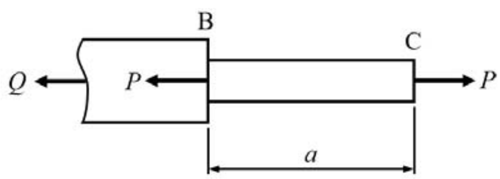
図 1　荷重を受ける丸棒

＜解答欄＞

（1）AB 間を切断して力 Q が作用しているとして，つり合い条件から，

$-Q-P+P=0$

$\therefore Q=0$



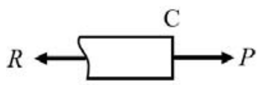
AB 間には力が作用していないので，

$\sigma_{AB}=0$

BC 間を切断して力 R が作用しているとして，つり合い条件から，

$-R+P=0$

$\therefore R=P$



$$\sigma_{BC}=\frac{P}{\pi d^2/4}=\frac{4P}{\pi d^2}$$

（2）AB 間には力が作用していないので，

$\delta_B=0$

δ_C は丸棒 BC 間の伸びと等しいので，

$$\delta_C=\frac{\sigma_{BC}\cdot a}{E}=\frac{4Pa}{\pi d^2 E}$$

※　受験者はこの欄に 記入しないこと
点

受験番号

材料力学（２／２）

解答例

問 2（50 点／100 点）

図 2 のように，両端が単純支持された梁 AD の B 点に曲げモーメント M_0 が，C 点に集中荷重 F が作用する。AB，BC および CD の長さは ℓ である。梁 AD のせん断力線図（SFD）および曲げモーメント線図（BMD）を描きなさい。ただし，$F\ell < M_0$ とする。

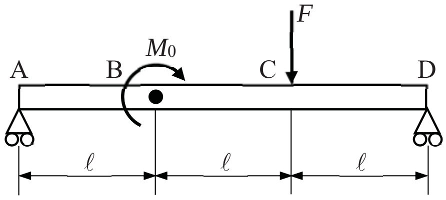
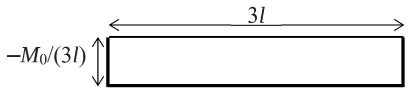
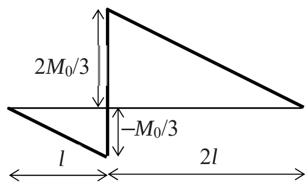
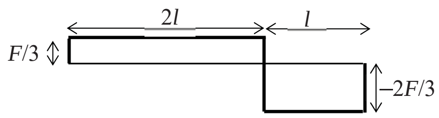
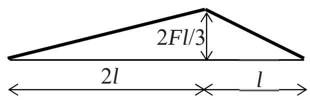
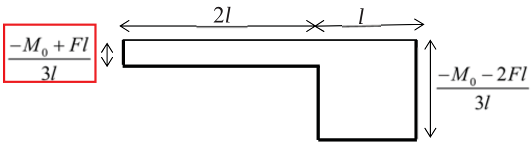
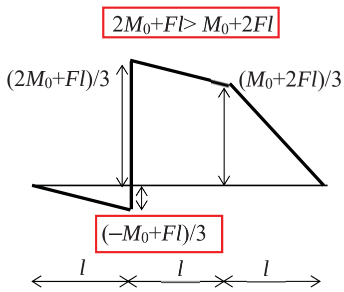


図 2　曲げモーメントと集中荷重を受ける梁

<解答欄>

M_0 だけ，F だけが作用する場合の SFD および BMD は以下の図になる。これらを重ね合わせたものが求める SFD および BMD である。

	SFD	BMD
M_0 だけが作用		
F だけが作用		
M_0 と F が作用する場合		

※　受験者はこの欄に
記入しないこと

点

2026 年度
熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験

機械システム工学専攻
（機械工学教育プログラム・機械システム教育プログラム）

専門科目

機械力学

試験日：2025 年 8 月 19 日
試験時間：15:00～15:50

注意事項
1. 試験開始の合図があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 試験終了時まで退出できません。途中で気分が悪くなった場合などには，静かに手を挙げて監督者に知らせてください。
3. この問題・解答冊子は「機械力学」の問題および解答用紙です。
4. この冊子はこの表紙を含めて全部で 4 ページあります。試験中にこの冊子の落丁，乱丁あるいは印刷の不鮮明な箇所があれば，静かに手を挙げて監督者に知らせてください。
5. 表紙を除く全てのページの所定の欄に受験番号を書いてください。
6. 解答は所定の解答欄に書いてください。所定の解答欄以外に解答を書いた場合，採点されません。
7. 試験終了後，この冊子を持ち帰ってはいけません。

科目名	問題番号　　（ページ数）	必答・選択の別
機械力学	問 1，問 2　　（3 ページ）	全問必答

2026 年度
熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験
機械システム工学専攻（機械工学教育プログラム・機械システム教育プログラム）
専門科目

受験番号

機械力学（1／3）

解答例

問 1（50 点／100 点）

図 1 のように，質量mの質点が付いた質量の無視できる L 型の棒にばね定数kのばねおよび粘性係数cのダンパーが付いて固定された支点Aで自由に回転できるものとする。ばねに強制変位$x_d(t)$を与え微小振動させるとき，以下の問いに答えよ。ただし，$x_d(t) = 0$のときにつり合っている状態を中立点（平衡点）とし，中立点からの棒の回転角を$\theta(t)$とする。

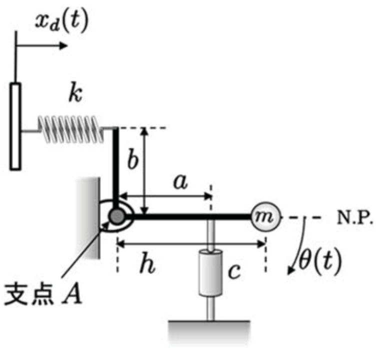


図 1

（1） この強制振動系の運動方程式を求めよ。
（2） $x_d(t) = D\cos\omega t$，$D > 0$と与えたときの強制振動解を求めよ。
（3） （2）において$\omega = \omega_1$の強制変位を与えた。この強制振動によりダンパーから床に作用する力の最大値を求めよ。

＜解答欄＞

（1） モーメントのつり合いより

$$mh^2\ddot{\theta}(t) = -c\left(a\dot{\theta}(t)\right)a - k\left(b\theta(t) - x_d(t)\right)b$$

よって

$$mh^2\ddot{\theta}(t) + ca^2\dot{\theta}(t) + kb^2\theta(t) = kbx_d(t)$$

を得る

（2） $\theta(t) = B\cos(\omega t - \phi)$ とおくと，係数比較より

$$(-mh^2\omega^2 + kb^2)B\cos\phi + ca^2\omega\sin\phi = kbDx_d(t)$$
$$-ca^2\omega\cos\phi\,(-mh^2\omega^2 + kb^2)B\sin\phi = 0$$

が得られる。よって，これを解くと

$$B(\omega) = \frac{kbD}{\sqrt{(-mh^2\omega^2 + kb^2)^2 + (ca^2\omega)^2}}$$

$$\phi(\omega) = tan^{-1}\left(\frac{ca^2}{-mh^2\omega^2 + kb^2}\right)$$

（3） $\theta(t) = B(\omega_1)\cos(\omega_1 t - \phi)$ より，壁に作用する力は

$$F_c = ca\dot{\theta}(t) = -ca\omega_1 B(\omega_1)\sin(\omega_1 t - \phi)$$

よって，最大値は，$F_{cmax} = ca\omega_1 B(\omega_1)$となる。

※ 受験者はこの欄に
記入しないこと

点

2026 年度
熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）入学試験
機械システム工学専攻（機械工学教育プログラム・機械システム教育プログラム）
専門科目

受験番号

機械力学（２／３）

問 2（50 点／100 点）

図 2 で表されるように質量$2m$の重りと質量mの重りが付いた振子がばねで連結されている。この 2 自由度振動系について以下の問いに答えよ。ただし，平衡位置からの回転角をそれぞれθ_1，θ_2とし，微小振動するものとする。

（１） この振動系の運動方程式を求めよ。
（２） $k_1 = k_2 = 2k$のとき，この振動系の 1 次と 2 次の固有角振動数を求めよ。
（３） （２）の振動系の 1 次及び 2 次の振動モードを求めよ。
（４） （２）の振動系の一般解を求めよ。

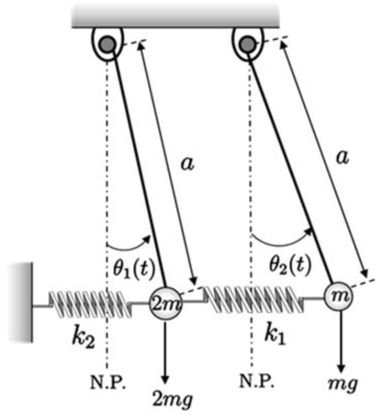


図 2

＜解答欄＞

（１） モーメント(トルク)のつり合いより

$$2ma^2\ddot{\theta}_1(t) = -k_2\big(a\theta_1(t)\big)a - k_1\big(a\theta_1(t) - a\theta_2(t)\big)a - 2mga\theta_1(t)$$
$$ma^2\ddot{\theta}_2(t) = -k_1\big(a\theta_2(t) - a\theta_1(t)\big)a - mga\theta_2(t) \qquad ①$$

よって，

$$2ma^2\ddot{\theta}_1(t) + \big((k_1 + k_2)a^2 + 2mga\big)\theta_1(t) - k_1a^2\theta_2(t) = 0$$
$$ma^2\ddot{\theta}_2(t) - k_1a^2\theta_1(t) + (k_1a^2 + mga)\theta_2(t) = 0 \qquad ②$$

（２） $k_1 = k_2 = 2k$より

$$2ma^2\ddot{\theta}_1(t) + (4ka^2 + 2mga)\theta_1(t) - 2ka^2\theta_2(t) = 0$$
$$ma^2\ddot{\theta}_2(t) - 2ka^2\theta_1(t) + (2ka^2 + mga)\theta_2(t) = 0 \qquad ③$$

解の形を

$$\begin{bmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix} cos(\,\omega t - \varphi)$$

とおくと，③より

$$\begin{bmatrix}-2ma\omega^2 + 2(2ka + mg) & -2ka\\ -2ka & -ma\omega^2 + (2ka + mg)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix} = 0 \qquad ④$$

を得る．これが自明な解（$a_1 = a_2 = 0$）以外の解をもつためには，

$$det\begin{bmatrix}-2ma\omega^2 + 2(2ka + mg) & -2ka\\ -2ka & -ma\omega^2 + (2ka + mg)\end{bmatrix} = 0$$

よって，

$$2\{-ma\omega^2 + (2ka + mg)\}^2 - (2ka)^2 = 0$$

すなわち，

$$\big[\sqrt{2}\{-ma\omega^2 + (2ka + mg)\} - (2ka)\big]\big[\sqrt{2}\{-ma\omega^2 + (2ka + mg)\} + (2ka)\big] = 0$$

受験番号

機械力学（３／３）

問 2 の解答欄のつづき

＜解答欄＞

これより，1 次および 2 次の固有角振動数は

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})ka+mg}{ma}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})ka+mg}{ma}}$$

となる．

（3） ④より，

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-ma\omega^2 + (2ka+mg)}{ka}$$

なので，$\omega = \omega_1$のとき

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-\{(2-\sqrt{2})ka+mg\} + (2ka+mg)}{ka} = \sqrt{2}$$

また，$\omega = \omega_2$のとき

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-\{(2+\sqrt{2})ka+mg\} + (2ka+mg)}{ka} = -\sqrt{2}$$

を得る．よって，1 次及び 2 次のモードはそれぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

となる．

（4） 一般解は

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = a_1^{(1)} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a_1^{(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \varphi_2)$$

となる．ここに，$a_1^{(1)}$，$a_1^{(2)}$，φ_1，φ_2は未定定数である．

※　受験者はこの欄に記入しないこと
点