【数学】問１　解答例

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\1&2&1&-2\\2&3&-1&1\\3&5&0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ とおき，拡大係数行列を $\tilde{A}=(A,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&a\\1&2&1&-2&b\\2&3&-1&1&c\\3&5&0&-1&d\end{pmatrix}$

と表す。解を持つことの必要十分条件は $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,\tilde{A}$ である。$\tilde{A}$ を行基本変形すると

$$\tilde{A}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&3&a\\0&1&3&-5&b-a\\0&1&3&-5&c-2a\\0&2&6&-10&d-3a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-5&8&2a-b\\0&1&3&-5&b-a\\0&0&0&0&c-a-b\\0&0&0&0&d-a-2b\end{pmatrix}$$

となる。よって $\begin{cases}c-a-b=0\\d-a-2b=0\end{cases}$ が求める条件である。このとき，

$$\begin{cases}x=(2a-b)+5s-8t\\y=(b-a)-3s+5t\\z=s\\w=t\end{cases}$$

となる。ただし s,t は任意定数である。

(2) 行列に対する行基本変形を行うことにより，求める逆行列は次のようになる。

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-a&1&0&0\\a^2&-2a&1&0\\-a^3&3a^2&-3a&1\end{pmatrix}$$

(3) 以下のように，行基本変形を行うと上三角行列になり，行列式は 1 であることが分かる。

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&2&2&2\\1&2&3&3&3\\1&2&3&4&4\\1&2&3&4&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=1$$

【数学】問２　解答例

(1) 行列 A の固有多項式は $\det(tI - A) = (t-2)(t+1)^2$ である。固有値は $\lambda_1 = 2$ (重複度 1) および $\lambda_2 = -1$ (重複度 2) である。$\lambda_1 = 2$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1$, $\lambda_2 = -1$ に対応する 2 つの 1 次独立な固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ とおくと,

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と取れる。ただし，これ以外にも固有ベクトルの取り方がある。

(2) $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3$ となる実数 x, y, z を求めればよく，答えは $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ である。ゆえに,

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表せる。ただし，(1) の解答によって，これ以外の解答もある。

(3) $A^n\boldsymbol{v}$ を計算すると

$$\begin{aligned} A^n\boldsymbol{v} &= \frac{1}{3}A^n\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{3}A^n\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{3}A^n\boldsymbol{v}_3 \\ &= \frac{1}{3}2^n\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{3}(-1)^n\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{3}(-1)^n\boldsymbol{v}_3 \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n \\ 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

【数学】問３　解答例

(1) $\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \in (-1,1))$ であるから,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\left\{\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{\pi}{4}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)-\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}x}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{Sin}^{-1})'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\\ &= 1\end{aligned}$$

となる。または,

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{\pi}{4}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

であるから, ロピタルの定理より,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\left\{\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{\pi}{4}\right\} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}x})^2}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}x})^2}}\\ &= 1\end{aligned}$$

を得る。

(2)

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{1+\left(\frac{7\sin x+3\cos x}{7\cos x-3\sin x}\right)^2}\times\left(\frac{7\sin x+3\cos x}{7\cos x-3\sin x}\right)'\\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{7\sin x+3\cos x}{7\cos x-3\sin x}\right)^2}\times\frac{(7\cos x-3\sin x)^2+(7\sin x+3\cos x)^2}{(7\cos x-3\sin x)^2}\\ &= \frac{(7\cos x-3\sin x)^2+(7\sin x+3\cos x)^2}{(7\cos x-3\sin x)^2+(7\sin x+3\cos x)^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

(3) $2<a<b<3$ とする。このとき

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-2)(3-x)}} &= \int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{5}{2})^2}}\\ &= \Big[\mathrm{Sin}^{-1}(2x-5)\Big]_a^b\\ &= \mathrm{Sin}^{-1}(2b-5)-\mathrm{Sin}^{-1}(2a-5)\end{aligned}$$

となる。$a\to 2+0,\ b\to 3-0$ として π を得る。

【数学】問 4　解答例

(1) 2 変数関数の連鎖法則より

$$z_r = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta, \quad z_\theta = -r z_x \sin\theta + r z_y \cos\theta$$

となることから

$$\begin{aligned}
z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2 &= z_x^2 \cos^2\theta + z_y^2 \sin^2\theta + 2 z_x z_y \cos\theta \sin\theta \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\left(r^2 z_x^2 \sin^2\theta + r^2 z_y^2 \cos^2\theta - 2r^2 z_x z_y \cos\theta \sin\theta\right) \\
&= z_x^2 \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + z_y^2 \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) \\
&= z_x^2 + z_y^2
\end{aligned}$$

を得る。

(2) 積分領域 D は x 単純領域として $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$ とも書ける。よって,

$$\begin{aligned}
\iint_D \cos(x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(\int_0^x \mathrm{d}y\right) \cos(x^2)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos(x^2)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

となる。