

【数学】問1 解答例

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{とおき, 拡大係数行列を } \tilde{A} = (A, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 1 & -2 & b \\ 2 & 3 & -1 & 1 & c \\ 3 & 5 & 0 & -1 & d \end{pmatrix}$$

と表す。解を持つことの必要十分条件は  $\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A}$  である。 $\tilde{A}$  を行基本変形すると

$$\tilde{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 3 & -5 & b-a \\ 0 & 1 & 3 & -5 & c-2a \\ 0 & 2 & 6 & -10 & d-3a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 8 & 2a-b \\ 0 & 1 & 3 & -5 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-a-2b \end{pmatrix}$$

となる。よって  $\begin{cases} c-a-b=0 \\ d-a-2b=0 \end{cases}$  が求める条件である。このとき、

$$\begin{cases} x = (2a-b) + 5s - 8t \\ y = (b-a) - 3s + 5t \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

となる。ただし  $s, t$  は任意定数である。

(2) 行列に対する行基本変形を行うことにより、求める逆行列は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -2a & 1 & 0 \\ -a^3 & 3a^2 & -3a & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 以下のように、行基本変形を行うと上三角行列になり、行列式は1であることが分かる。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

## 【数学】問2 解答例

- (1) 行列  $A$  の固有多項式は  $\det(tI - A) = (t - 2)(t + 1)^2$  である。固有値は  $\lambda_1 = 2$  (重複度 1) および  $\lambda_2 = -1$  (重複度 2) である。 $\lambda_1 = 2$  に対応する固有ベクトルを  $\mathbf{v}_1$ ,  $\lambda_2 = -1$  に対応する 2 つの 1 次独立な固有ベクトルを  $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  とおくと,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と取れる。ただし、これ以外にも固有ベクトルの取り方がある。

- (2)  $\mathbf{v} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$  となる実数  $x, y, z$  を求めればよく、答えは  $x = y = z = \frac{1}{3}$  である。ゆえに,

$$\mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表せる。ただし、(1) の解答によって、これ以外の解答もある。

- (3)  $A^n \mathbf{v}$  を計算すると

$$\begin{aligned} A^n \mathbf{v} &= \frac{1}{3} A^n \mathbf{v}_1 + \frac{1}{3} A^n \mathbf{v}_2 + \frac{1}{3} A^n \mathbf{v}_3 \\ &= \frac{1}{3} 2^n \mathbf{v}_1 + \frac{1}{3} (-1)^n \mathbf{v}_2 + \frac{1}{3} (-1)^n \mathbf{v}_3 \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n \\ 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

【数学】問3 解答例

(1)  $(\text{Sin}^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  ( $x \in (-1, 1)$ ) であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \text{Sin}^{-1} \left( \frac{x+1}{\sqrt{2x}} \right) - \frac{\pi}{4} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{Sin}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) - \text{Sin}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{2x}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\text{Sin}^{-1})' \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。または,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Sin}^{-1} \left( \frac{x+1}{\sqrt{2x}} \right) - \frac{\pi}{4} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

であるから、ロピタルの定理より,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \text{Sin}^{-1} \left( \frac{x+1}{\sqrt{2x}} \right) - \frac{\pi}{4} \right\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{Sin}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \right)^2}} \times \left( -\frac{1}{\sqrt{2x^2}} \right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \right)^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

を得る。

(2)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1 + \left( \frac{7 \sin x + 3 \cos x}{7 \cos x - 3 \sin x} \right)^2} \times \left( \frac{7 \sin x + 3 \cos x}{7 \cos x - 3 \sin x} \right)' \\ &= \frac{1}{1 + \left( \frac{7 \sin x + 3 \cos x}{7 \cos x - 3 \sin x} \right)^2} \times \frac{(7 \cos x - 3 \sin x)^2 + (7 \sin x + 3 \cos x)^2}{(7 \cos x - 3 \sin x)^2} \\ &= \frac{(7 \cos x - 3 \sin x)^2 + (7 \sin x + 3 \cos x)^2}{(7 \cos x - 3 \sin x)^2 + (7 \sin x + 3 \cos x)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(3)  $2 < a < b < 3$  とする。このとき

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}} &= \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2}} \\ &= \left[ \text{Sin}^{-1} \left( 2x - 5 \right) \right]_a^b \\ &= \text{Sin}^{-1} (2b - 5) - \text{Sin}^{-1} (2a - 5) \end{aligned}$$

となる。 $a \rightarrow 2+0$ ,  $b \rightarrow 3-0$  として  $\pi$  を得る。

【数学】問4 解答例

(1) 2変数関数の連鎖法則より

$$z_r = z_x \cos \theta + z_y \sin \theta, \quad z_\theta = -r z_x \sin \theta + r z_y \cos \theta$$

となることから

$$\begin{aligned} z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2 &= z_x^2 \cos^2 \theta + z_y^2 \sin^2 \theta + 2z_x z_y \cos \theta \sin \theta \\ &\quad + \frac{1}{r^2} (r^2 z_x^2 \sin^2 \theta + r^2 z_y^2 \cos^2 \theta - 2r^2 z_x z_y \cos \theta \sin \theta) \\ &= z_x^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + z_y^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= z_x^2 + z_y^2 \end{aligned}$$

を得る。

(2) 積分領域  $D$  は  $x$  単純領域として  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0 \leq y \leq x\}$  とも書ける。よって,

$$\begin{aligned} \iint_D \cos(x^2) \, dx dy &= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left( \int_0^x dy \right) \cos(x^2) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cos(x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

## 【半導体物理・材料】問 1

(1) 以下の問いに答えなさい。

(ア) 図問 1-1 に示すのは Si の結晶構造である。この結晶構造の名称を答えなさい。

(解答例) ダイヤモンド型構造

(イ) Si 原子と Si 原子が作る化学結合の名称を答えなさい。

(解答例) 共有結合

(ウ) 図 1 に示す構造の中で、Si 原子の配位数はいくつであるかを答えなさい。

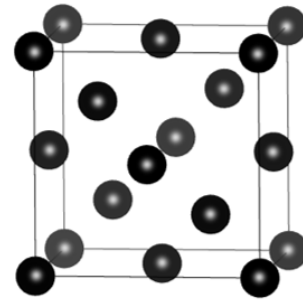
(解答例) 4

(エ) 窒素(N)原子の基底状態における電子配置を  $1s^2 2s^2 2p^3$  のように表すものとする。このとき Si の基底状態における電子配置を答えなさい。

(解答例)  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$

(オ) Si 結晶の格子定数を  $a$  (nm), Si のモル質量を  $M$  (g/mol), アボガドロ数を  $N_A$  (/mol) とする。このとき, Si 結晶の密度 ( $\text{g/cm}^3$ ) を求める式を示しなさい。

(答え)  $\frac{8M}{N_A \times a^3 \times 10^{-21}}$



図問 1-1 Si の結晶構造。黒丸は Si 原子、実線で囲まれた六面体は単位格子を示す。

[配点] (30点)

(ア) 「ダイヤモンド型構造」, 「ダイヤモンド構造」なら4点。

(イ) 「共有結合」なら4点。

(ウ) 「4」, 「4つ」は4点。「4本」などは3点(1点減点)。

(エ) 「 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$ 」なら8点。「 $[\text{Ne}] 3s^2 3p^2$ 」もおまけで8点。「 $[\text{He}] 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$ 」もおまけで6点。そのほかの解答は, 電子数が合計で14個なら2点。「 $3s^2 3p^2$ 」があれば2点。

(オ) 「 $\frac{8M}{N_A \times a^3 \times 10^{-21}}$ 」なら10点。「 $\times 10^{-21}$ 」を忘れてるのは3点減点。「8M」の代わりに「4M」

とか「2M」は2点減点。そのほかの解答は, 「8M」が式中にあれば2点, 「 $N_A \times a^3$ 」が式中にあれば3点。

(2) 以下の問いに答えなさい。

(ア) 図問 1-2(a)中の点線の○で示すように、本来存在するべき位置に原子が存在していない型の格子欠陥を何と呼ぶか？その名称を答えなさい。

(解答例) (原子)空孔

(イ) 図問 1-2 (b)に示す単位立方格子中、(ア)で示す格子の方向をミラー指数で答えなさい。

(解答例)  $[\bar{1}10]$

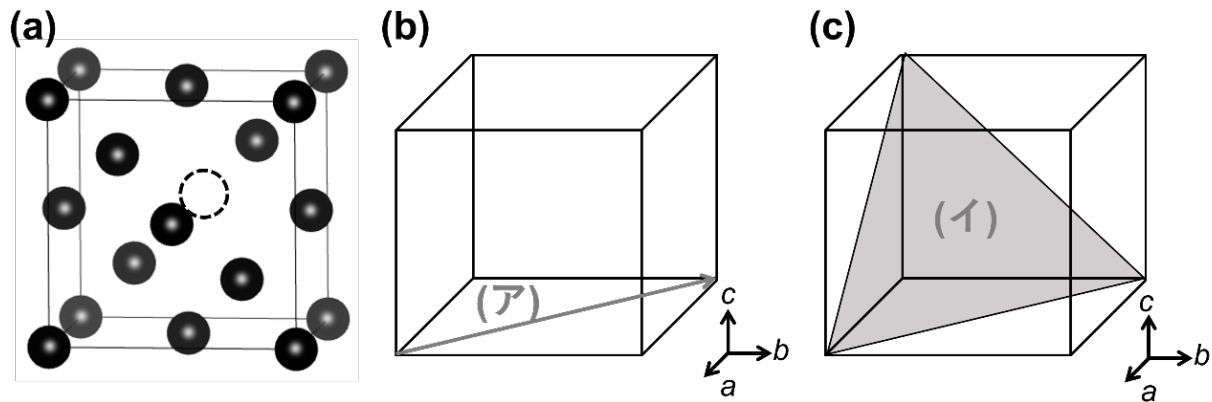
(ウ) 図問 1-2 (c)に示す単位立方格子中、(イ)で示す格子面をミラー指数で答えなさい。

(解答例) (111)

(エ) 図問 1-2 (c)に示す単位立方格子中の(イ)で示す格子面の格子面間隔の値について、正しいものを以下(A)~(E)の選択肢から選びなさい。ただし、格子定数を  $a$  とする。

選択肢:(A)  $2a$ , (B)  $a/2$ , (C)  $a/\sqrt{2}$ , (D)  $a/\sqrt{5}$ , (E)  $a/\sqrt{3}$

(解答例) (E)



図問 1-2 (a)格子欠陥を含む Si 結晶, (b)ある格子方向, および(c)ある格子面を示す模式図。

[配点] (20点)

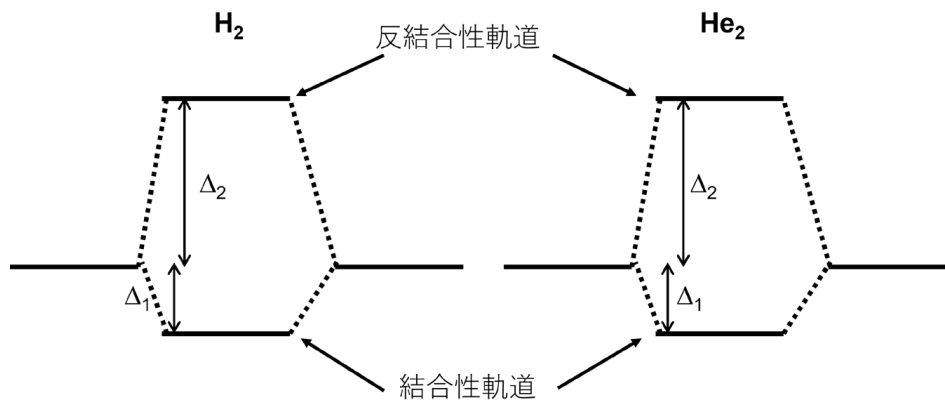
(ア) 「空孔」, 「原子空孔」, 「空格子点」, 「Vacancy」は4点。「空隙」は1点。

(イ)  $[\bar{1}10]$ なら4点。 $\langle\bar{1}10\rangle$ は3点。 $[110]$ など符号違いは3点。 $[-110]$ は3点。かつこのない $\bar{1}10$ は2点。そのほかの解答は0が1個, 1が2個ならおまけで1点。

(ウ) (111)なら4点。 $\{111\}$ なら3点。符号違いで1が3個ある場合は3点。かつこの無い111は2点。

(エ) (E)なら8点。そのほかは0点。

(3) 図問 1-3 に水素とヘリウムの二原子分子における分子軌道の構造図を示す。実際には、水素の二原子分子( $\text{H}_2$ )が安定して存在するのに対して、ヘリウムの二原子分子( $\text{He}_2$ )が安定して存在しない理由を図および図中の記号や語句を利用して答えなさい。ただし、 $\Delta_1$ より $\Delta_2$ の方が大きいものとする。



図問 1-3 水素の二原子分子における原子軌道と分子軌道，ならびにヘリウムの二原子分子における原子軌道と分子軌道を示す模式図。

(解答例)  $\text{H}_2$  分子の場合は、総電子数が2つであり、分子軌道の結合性軌道を2つの電子が占有することで元の原子軌道2つを占有する場合より、 $2 \times \Delta_1$  だけ合計のエネルギーが低くなり、安定化される。一方で、 $\text{He}_2$  分子の場合は、総電子数が4つであり、分子軌道の結合性軌道と反結合性軌道をそれぞれ2つの電子が占有するが、 $\Delta_1$ より $\Delta_2$ の方が大きいため、合計のエネルギーは元の原子軌道を電子が2つずつ占有する場合に比べて高くなる。したがって、 $\text{He}_2$  分子として存在するより、2つの He 原子として存在する方が安定であるため。

[配点] (30点)

「 $\text{H}_2$  分子の総電子数は2」、「分子の場合、2つの電子がいずれも結合性軌道を占める」、「分子の方が原子より総エネルギーが低くなるので分子が安定。」( $2 \times \Delta_1$  だけがあると2点加点) それぞれの表現で4点。(合計14点)

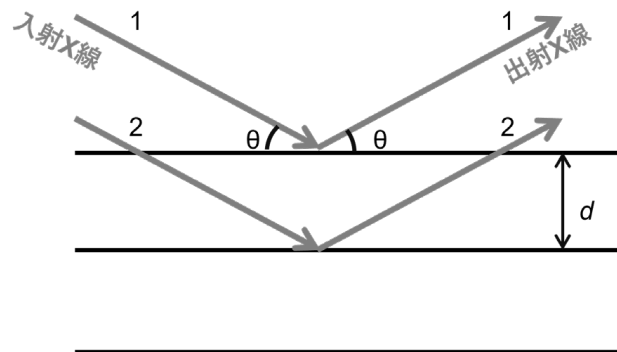
「 $\text{He}_2$  分子の総電子数は4」、「分子の場合、2つの電子がいずれも結合性軌道と反結合性軌道を占める」、「 $\Delta_1$ より $\Delta_2$ の方が大きい」、「分子の方が原子より総エネルギーが高くなる。」 それぞれの表現で4点。(合計16点)

(4) 以下の問いに答えなさい。

図問 1-4 に示すように、ある結晶の表面に平行な格子面と角度  $\theta$  をなす方向から、波長  $\lambda$  の特 X 線が入射し、試料表面から角度  $\theta$  の方向に出ていく X 線を検出するものとする。この時、以下の問いに答えなさい。

(ア) 特性 X 線の発生原理および特徴を述べなさい。

(解答例)ある物質に十分に高いエネルギーを有する粒子や電磁波などが照射されると、内殻軌道の電子が物質の外部に放出される。それによって生じた空の軌道に、よりエネルギーの高い外殻の軌道から電子が遷移して来たときの余剰エネルギーが電磁波、つまり、X 線として放出されることで特性 X 線が生じる。そのエネルギーは原子中における電子の軌道のエネルギー差となるため、原子ごとに固有の値であることが特性 X 線の特徴である。



図問 1-4 結晶表面における X 線の入射と出射を示す模式図。

(イ) 格子面間隔を  $d$  とするとき、図中、1 で示す経路を通った X 線と 2 で示す経路を通った X 線が干渉により強め合う条件を式で示しなさい。

(解答例)  $2d \sin\theta = n\lambda$  ( $n$  は整数)

(ウ) (イ) で得られる条件の名称を答えなさい。 (答え)ブラッグ (Bragg) の条件

[配点] (20点)

(ア) 「内殻軌道の電子が外に出る」、「その空の軌道を外殻軌道の電子が埋める」、「余剰エネルギーが電磁波 (X 線) として放出される」、「エネルギーが軌道のエネルギー差なので、元素固有の値である」、それぞれ 2 点。(合計 8 点)

(イ) 「 $2d \sin\theta = n\lambda$  ( $n$  は整数)」なら 8 点。 $n$  が抜けているのは 6 点 (2 点減点)。「 $d \sin\theta = n\lambda$  ( $n$  は整数)」は 4 点。(合計 8 点)

(ウ) 「ブラッグの条件」、「Bragg の条件」なら 4 点。「ブラッグの法則」、「Bragg の法則」も 4 点、「ラウエの条件」は 1 点。(合計 4 点)

以上。

## 【半導体物理・材料】問 1 (解答例)

(1) 以下の問いに答えなさい。

(ア) 図問 1-1 に示すのは Si の結晶構造である。この結晶構造の名称を答えなさい。

(解答例) ダイヤモンド型構造

(イ) Si 原子間の化学結合の名称を答えなさい。

(解答例) 共有結合

(ウ) 図問 1-1 中, Si 原子の配位数を答えなさい。

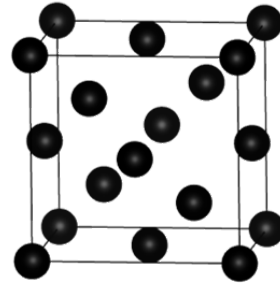
(解答例) 4

(エ) 窒素(N)原子の基底状態における電子配置を  $1s^2 2s^2 2p^3$  のように表すものとする。このとき Si の基底状態における電子配置を答えなさい。

(解答例)  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$

(オ) Si 結晶の格子定数を  $a$  (nm), Si のモル質量を  $M$  (g/mol), アボガドロ数を  $N_A$  (/mol) とする。このとき, Si 結晶の密度 ( $\text{g/cm}^3$ ) を求める式を示しなさい。

(答え)  $\frac{8M}{N_A \times a^3 \times 10^{-21}}$



図問 1-1

(2) 以下の問いに答えなさい。

(ア) 図問 1-2 (a)中の点線の丸で示すように、本来存在するべき位置に原子が存在していない型の格子欠陥の名称を答えなさい。

(解答例) (原子)空孔

(イ) 図問 1-2 (b)に示す単位立方格子中の I で示す格子の方向をミラー指数で答えなさい。

(解答例)  $[\bar{1}10]$

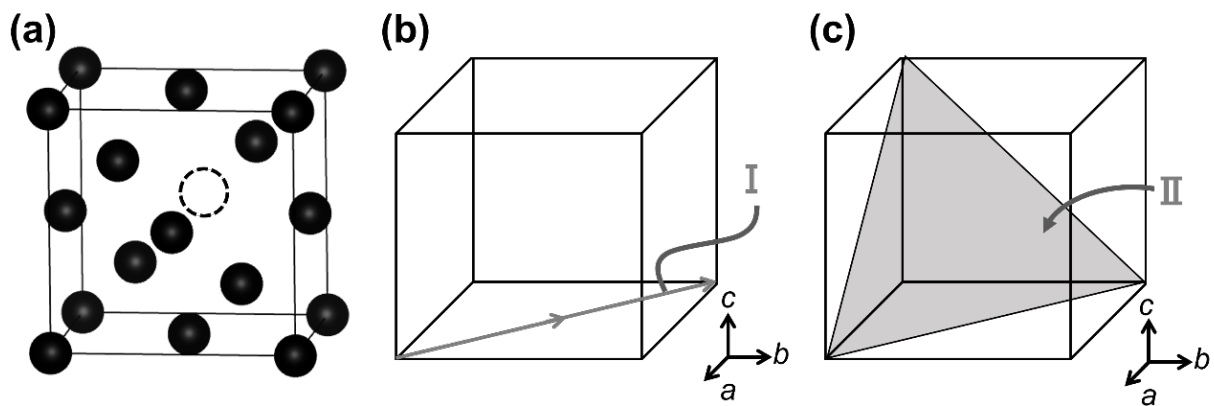
(ウ) 図問 1-2 (c)に示す単位立方格子中の II で示す格子面をミラー指数で答えなさい。

(解答例) (111)

(エ) 図問 1-2 (c)に示す単位立方格子中の II で示す格子面の格子面間隔の値について、正しいものを以下(A)~(E)の選択肢から選びなさい。ただし、格子定数を  $a$  とする。

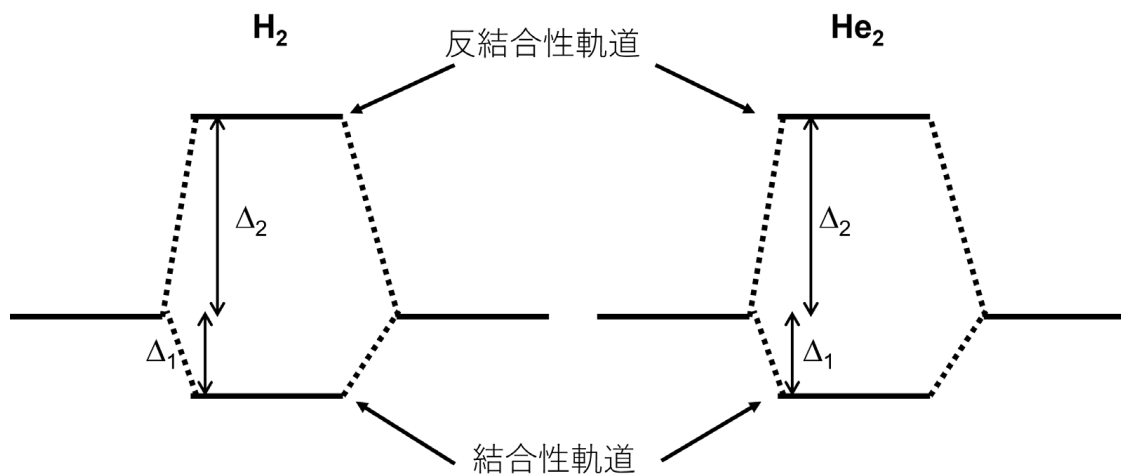
選択肢 (A)  $2a$ , (B)  $\frac{a}{2}$ , (C)  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ , (D)  $\frac{a}{\sqrt{5}}$ , (E)  $\frac{a}{\sqrt{3}}$

(解答例) (E)



図問 1-2

(3) 図問 1-3 に水素とヘリウムの二原子分子における分子軌道のエネルギー準位図を示す。実際には、水素の二原子分子 ( $\text{H}_2$ ) が安定して存在するのに対して、ヘリウムの二原子分子 ( $\text{He}_2$ ) が安定して存在しない理由を図および図中の記号や語句を利用して答えなさい。ただし、 $\Delta_1$  より  $\Delta_2$  の方が大きいものとする。



図問 1-3

(解答例)  $\text{H}_2$  分子の場合は、総電子数が 2 つであり、分子軌道の結合性軌道を 2 つの電子が占有することで元の原子軌道 2 つを占有する場合より、 $2 \times \Delta_1$  だけ合計のエネルギーが低くなり、安定化される。一方で、 $\text{He}_2$  分子の場合は、総電子数が 4 つであり、分子軌道の結合性軌道と反結合性軌道をそれぞれ 2 つの電子が占有するが、 $\Delta_1$  より  $\Delta_2$  の方が大きいため、合計のエネルギーは元の原子軌道を電子が 2 つずつ占有する場合に比べて高くなる。したがって、 $\text{He}_2$  分子として存在するより、2 つの He 原子として存在する方が安定であるため。

(4) 以下の問いに答えなさい。

図問 1-4 に示すように、ある結晶の表面に平行な格子面と角度  $\theta$  をなす方向から、波長  $\lambda$  の特性 X 線が入射し、試料表面から角度  $\theta$  の方向に出ていく X 線を検出するものとする。この時、以下の問いに答えなさい。

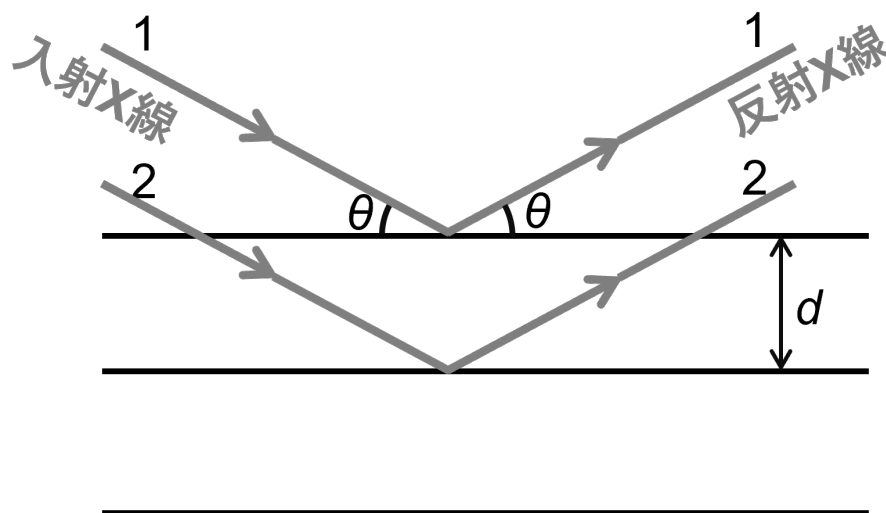
(ア) 特性 X 線の発生原理および特徴を述べなさい。

(解答例)ある物質に十分に高いエネルギーを有する粒子や電磁波などが照射されると、内殻軌道の電子が物質の外部に放出される。それによって生じた空の軌道に、よりエネルギーの高い外殻の軌道から電子が遷移して来たときの余剰エネルギーが電磁波、つまり、X 線として放出されることで特性 X 線が生じる。そのエネルギーは原子中における電子の軌道のエネルギー差となるため、元素固有の値であることが特性 X 線の特徴である。

(イ) 格子面間隔を  $d$  とするとき、図中、1 で示す経路を通った X 線と 2 で示す経路を通った X 線が干渉により強め合う条件を、自然数  $n$  を用いて示しなさい。

(解答例) $2d \sin\theta = n\lambda$  ( $n$  は自然数)

(ウ) (イ) で得られる条件の名称を答えなさい。 (答え)ブラッグ (Bragg) の条件



図問 1-4

## 【半導体物理・材料】問2

(1)

(a)	伝導帯下端	(b)	正孔	(c)	ドナー	(d)	ドナー
(e)	中間	(f)	価電子	(g)	伝導	(h)	中間
(i)	伝導	(j)	イオン化ドナー	(k)	価電子	(l)	伝導
(m)	中間						

(2)

(ア)

A	n型半導体	B	金属	C	順
D	逆	E	整流	F	双(両)

(イ)

下線部(a)：空乏層（空間電荷層）

下線部(b)：電位障壁（ショットキーバリア[Schottky Barrier]）

(ウ)

C の場合：拡散電位から順方向バイアスを印加した電圧だけ電位が下がるので、この減算に素電荷を乗じたエネルギーが障壁となる。[別解] 電位障壁を  $\Phi_B'$ 、拡散電位を  $V_d$ 、順方向バイアスを  $V_F$ 、素電荷を  $q$  とした場合、電位障壁は、 $\Phi_B' = q(V_d - V_F)$  となる。

D の場合：拡散電位に逆方向バイアスを印加した電圧だけ電位が上がるので、この加算に素電荷を乗じたエネルギーが障壁となる。[別解] 電位障壁を  $\Phi_B'$ 、拡散電位を  $V_d$ 、逆方向バイアスを  $V_R$ 、素電荷を  $q$  とした場合、電位障壁は、 $\Phi_B' = q(V_d + V_R)$  となる。

## 【半導体物理・材料】問2

(3)

(ア)

下線部(a)：キャリアの再結合（再結合）

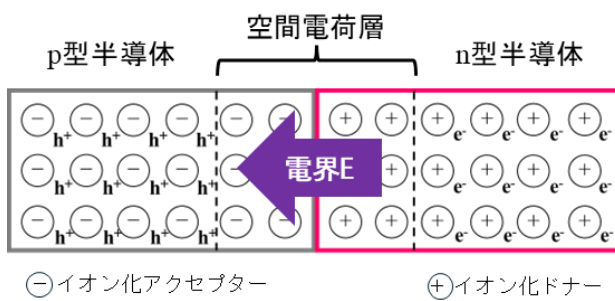
下線部(b)：空間電荷層（空乏層）

(イ)

p型側：マイナス（-）

n型側：プラス（+）

(ウ) 下図



受験番号

J

**【半導体工学】問3**

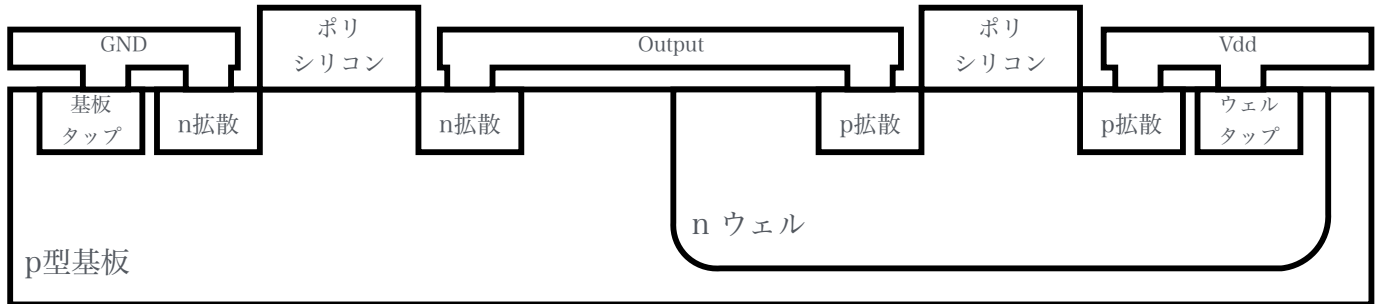
- (1) スタティック電力は、もれ電流によって消費される。具体的には、図問 3-1 のゲートから基板に流れるゲートリーク電流や、図問 3-1 のトランジスタがオフのときにドレインからソースにながれるサブスレッショルドリーク電流によって消費される。
- (2) 半導体プロセス上の工夫として、例えばゲート酸化膜の素材の変更が有効である。具体的には、高誘電率のゲート酸化膜を使用する。
- (3) この容量は、この CMOS インバーターが駆動する負荷容量の合計を示す。負荷容量は、後段のゲート入力容量と、後段のゲートや配線に関する寄生容量の合計である。寄生容量とは例えば、インバーターの出力に接続されている配線や、インバーターの出力に接続された別の素子の入力端子に、意図せず付随する容量のことである。
- (4) 図問 3-2 で、点 A から点 C（および点 C から点 D）に電流が流れる。
- (5) 出力がスイッチングにより変化する際（0 から 1、または、1 から 0）、図問 3-2 の容量が充電もしくは放電され、電流が流れる。電流は、トランジスタのオン抵抗を流れるため、ジュール熱が発生することで、ダイナミック電力が消費される。
- (6) ダイナミック電力は、電源電圧の 2 乗に比例し、スイッチングレートに比例する。
- (7) 回路上の工夫として、例えばクロックゲーティングと呼ばれる工夫が有効である。具体的には、フリップフロップに保持される値を変化させる必要が無いときには、そのフリップフロップに入力されるクロック信号を 0 に固定することで、フリップフロップ内部のダイナミック消費電力を削減できる。

裏面を使う場合はその旨を明記すること

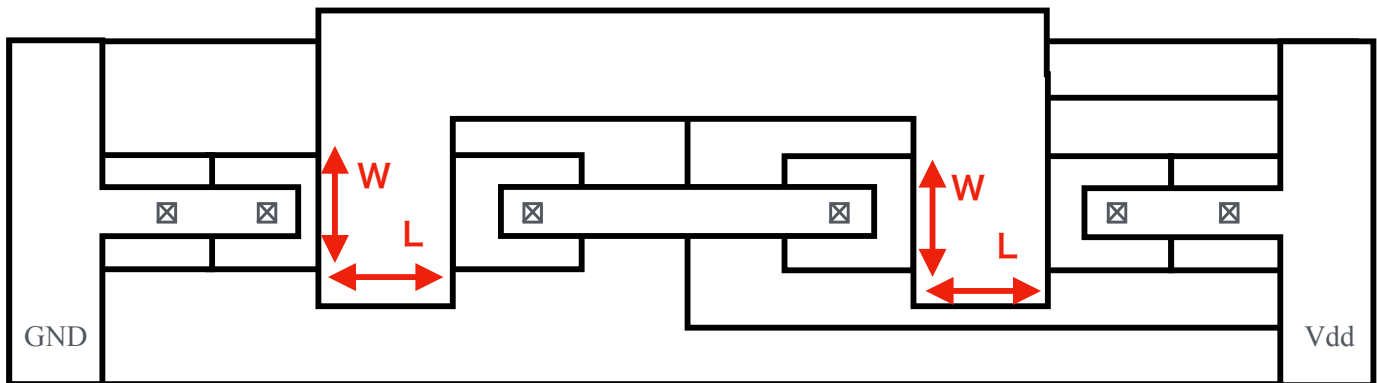
得点

## [半導体工学] 問4 解答例

- (1) a: 基板タップ、b: n拡散層、c: nウェル、d: ポリシリコン、e: p拡散層、f: ウェルタップ
- (2) nウェルを形成したのち、ポリシリコン、p/n拡散層の順で形成する。ポリシリコンを先に形成することで、ポリシリコン下部のゲート領域にp型/n型の不純物を拡散させず、左右直近の領域にp型/n型の不純物を拡散しすることを可能とする。すなわち、ポリシリコンがレジストや酸化膜同様の役割を果たし、ゲート領域との間に隙間を空けることなくソース・ドレインを形成することができる。



- (3) (矢印は左右どちらかひと組でも可)



- (4) ドレイン・ソース電流は  $\mu \cdot C_{ox} \cdot W/L$  に比例する。キャリアの移動度が一定の場合、ゲート幅が広がれば多くのキャリアが移動できるため、 $C_{ox}$  が大きければ反転層が厚くなるためそれぞれ電流が大きくなる。一方、ゲート長に比例してオン抵抗が大きくなるため、ゲート長には反比例する。
- (5) CMOS論理回路はスイッチング動作の際、配線やゲート、pn接合に付随する寄生容量を充放電する必要がある、ドレイン-ソース電流が大きくなると充放電動作も早まるため、動作は高速化する。

受験番号

J

**【情報基礎】問5（1）**

(1)

(ア)

```
for (int i=1; i<M; i++)  
    ED[i][0] = i;  
for (int j=1; j<N; j++)  
    ED[0][j] = j;
```

(イ)

```
A = ED[i][j-1]+1;
```

(ウ)

```
B = ED[i-1][j]+1;
```

(エ)

```
if (S[i] == T[j])  
    C = ED[i-1][j-1];  
else  
    C = ED[i-1][j-1]+1;
```

(オ)

```
if (A < B && A < C)  
    ED[i][j] = A;  
else {  
    if (B < C)  
        ED[i][j] = B;  
    else  
        ED[i][j] = C;  
}
```

裏面に続く

得点

## 【情報基礎】問5（2）～（4）

(2)

	\$	k	a	r	a	t
\$	0	1	2	3	4	5
k	1	0	1	2	3	4
u	2	1	1	2	3	4
m	3	2	2	2	3	4
a	4	3	2	3	2	3

(3)

編集距離は3

編集手順：

 $(0, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (4, 4) \rightarrow (4, 5)$ 

(4)

編集距離を求めるのに要する計算量は  $O(MN)$  である。

得点
----

受験番号			
J			

## 【情報基礎】問6 (1) ~ (4) (ア)

(1)

$$Hu^T = \mathbf{0} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_0 + x_1 \\ x_4 &= x_0 + x_1 + x_2 \\ x_5 &= x_0 + x_2 \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} + \text{は2を法とする加算} \\ \text{(排他的論理和)} \end{array} \right)$$

これに基づいて各3ビット情報に対する符号語が得られる。

符号語の表

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0

(2)

線形符号の最小距離は  $\mathbf{0}$  (全0の符号語) でない符号語の最小重みに等しいので、(1)の符号語の表より  $d = 3$  である。

(3)

$t$  ビットの誤りを訂正するためには、 $2t + 1$  以上の最小距離が必要である。(2)より、この符号の最小距離は  $d = 3$  であることから最大1ビットの誤りを訂正できる。

(4) (ア)

受信語  $r_1 = [1, 0, 0, 1, 0, 0]$  に対するシンδροームは

$$s_1^T = Hr^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となり  $H$  の第3列に一致するので、左から3番目のビットが誤りと判定される。よって、 $[1, 0, 1, 1, 0, 0]$  に訂正される。

裏面に続く

得点

**【情報基礎】問6（4）（イ）～（6）**

(4) (イ)

受信語  $r_2 = [0,0,1,1,1,0]$  に対するシンドロームは

$$s_2^T = Hr^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となり0でないので誤りを含んでいると判断されるが、 $H$ のどの列とも一致しないため1ビット誤りではなく、2ビット以上の誤りを含んでいると判断される。よって、誤りを検出するのみである。

(5)

右のカルノー図より、最小積和形は

$$x_5 = \overline{x_0} \cdot x_2 + x_0 \cdot \overline{x_2}$$

となる。（+はOR演算を表す。）

$x_1x_2 \backslash x_0$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

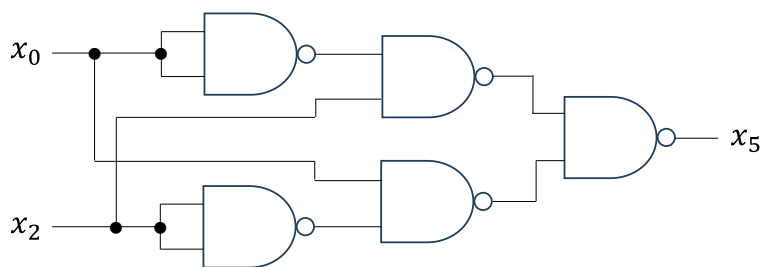
カルノー図

(6)

(5)で求めた最小積和形をドモルガンの定理を用いて変形すると以下を得る。

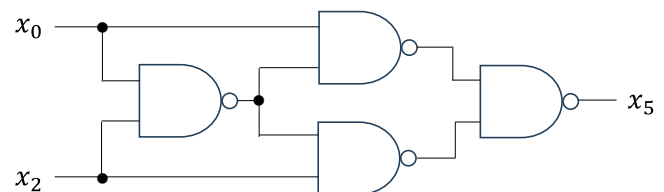
$$x_5 = \overline{\overline{x_5}} = \overline{\overline{\overline{x_0} \cdot x_2 + x_0 \cdot \overline{x_2}}} = \overline{\overline{x_0} \cdot x_2 \cdot x_0 \cdot \overline{x_2}}$$

よって、回路図は以下ようになる。



(別解)

$$\begin{aligned} x_5 &= \overline{x_0} \cdot x_2 + x_0 \cdot \overline{x_2} \\ &= \overline{x_0} \cdot x_2 + x_0 \cdot \overline{x_2} + x_0 \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_2} \\ &= x_0 \cdot (\overline{x_0} + \overline{x_2}) + x_2 \cdot (\overline{x_0} + \overline{x_2}) \\ &= x_0 \cdot (\overline{x_0 \cdot x_2}) + x_2 \cdot (\overline{x_0 \cdot x_2}) \\ &= \overline{\overline{x_0 \cdot x_2}} + \overline{\overline{x_2 \cdot (x_0 \cdot x_2)}} \\ &= \overline{\overline{x_0 \cdot (x_0 \cdot x_2)} \cdot x_2 \cdot (x_0 \cdot x_2)} \end{aligned}$$



得点

## 【計算機工学】問7 解答

- (1) ア：符号部，イ：指数部（指数フィールドも可），ウ：仮数部（仮数フィールド，小数部も可），エ：基数，オ：127（バイアス値も可）
- (2) 浮動小数点数の大小比較を容易にするため。バイアスを適用することで，指数部を符号なし整数として扱うことができ，浮動小数点数全体の比較が整数の比較と同様に行える。
- (3)  $(-1)^{(ア)} \times (1 + (ウ)) \times 2^{((イ)-(オ))}$  または  $(-1)^{\text{符号部}} \times (1 + \text{仮数部}) \times 2^{(\text{指数部}-\text{バイアス})}$  なども可とする
- (4)  $\pm\infty$ （無限大）の必要性：除算でゼロ除算が発生した場合や，演算結果が表現可能範囲を超えた場合に，エラーではなく数学的に意味のある値として扱うため。  
NaN（Not a Number）の必要性：  
 $0/0$ ， $\infty-\infty$ ， $\sqrt{-1}$ など数学的に定義されない演算の結果を表すため。エラー処理を統一的に行い，不正な値の伝播を防ぐことができる。
- (5)  $-12.75_{(10)}$ の絶対値を2進数に変換すると  $1100.11_{(2)}$ 。これは， $1100.11_{(2)} = 1.10011_{(2)} \times 2^3$ で表現される。このとき，符号ビットは1，指数部は  $10000010_{(2)}$ ，仮数部は  $100110000000000000000000_{(2)}$  となる。これより， $1100\_0001\_0100\_1100\_0000\_0000\_0000\_0000_{(2)}$ で表現され，16進数表記では  $C14C0000_{(16)}$ となる。

## 【計算機工学】問8 解答

(1)

(ア) プロセス A~D のそれぞれのターンアラウンドタイムは,  $a$ ,  $a+b$ ,  $a+b+c$ ,  $a+b+c+d$  である。したがって, 平均ターンアラウンドタイムは  $\frac{1}{4}\{a + (a + b) + (a + b + c) + (a + b + c + d)\} = a + \frac{3}{4}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}d$  となる。

(イ) 導出した平均ターンアラウンドタイムの式において, 最初に処理する  $a$  の係数が最も大きく, 最後に処理する  $d$  の係数が最小となるので,  $a < b < c < d$  となるようにタスクを並び替えればターンアラウンドタイムは最小となる。すなわち, 処理時間が短いプロセスから順番に処理する SJF (Shortest Job First) スケジューリングが平均ターンアラウンドタイム最小の観点からは最適となる。

(2)

(ア) RR スケジューリングとは, 実行待ちのプロセスに対して順番にプロセッサを割り当てるが, 一定時間内に処理できないプロセスは中断し, 待ち行列の最後尾に回すスケジューリング方式である。

(イ) 各時刻における実行中・待ち状態及び終了状態のプロセスは以下の表で表される。A~D の各プロセスの終了時刻は 6, 14, 8, 18 である。したがって, ターンアラウンドタイムはそれぞれ 6,  $13(=14-1)$ ,  $5(=8-3)$ ,  $13(=18-5)$  となり, 平均ターンアラウンドタイムは 9.25 と求められる。

時刻	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
実行		A		B		A		C		B		D		B		D		D	
待ち		B	A	AC	CB	CBD	BD	BD	D	D	B	B	D	D					
終了							A		C						B				D

受験番号

J

## 【電気電子回路】問9

(1) 図問9-2はテブナンの等価電圧源の回路である。

$V_1$ を求めるため、2つの電源について重ね合わせの理を用いる。

まず、電流源を開放した場合の端子A-B間の電圧を $V_{I=0}$ とすると、

$$V_{I=0} = 20\angle 0^\circ \frac{3+j5}{2+3+j5} = 20 \frac{(3+j5)(5-j5)}{(5+j5)(5-j5)} = 20 \frac{40+j10}{50} = 16+j4 \text{ V}$$

次に、電圧源を短絡した場合の端子A-B間の電圧を $V_{V=0}$ とすると、

$$V_{V=0} = 5\angle 0^\circ \frac{3+j5}{2+3+j5} = 10 \frac{(3+j5)(5-j5)}{(5+j5)(5-j5)} = 10 \frac{40+j10}{50} = 8+j2 \text{ V}$$

よって、重ね合わせの理から、

$$V_1 = V_{I=0} + V_{V=0} = 24 + j6 \text{ V} \quad (\text{答})$$

端子A-Bから見たインピーダンス $z_1$ は、電圧源を短絡、電流源を開放すると、2つの経路の並列回路とみなせるから、

$$z_1 = \frac{2(3+j5)}{2+3+j5} = \frac{2(3+j5)(5-j5)}{(5+j5)(5-j5)} = \frac{2(40+j10)}{50} = 1.6 + j0.4 \Omega \quad (\text{答})$$

(2) 図問9-3はノートンの等価電流源の回路である。

$I_2$ は(1)で求めた $V_1$ 、 $z_1$ との関係から、

$$I_2 = \frac{V_1}{z_1} = \frac{24+j6}{1.6+j0.4} = 15 \text{ A} \quad (\text{答})$$

$z_2$ は(1)で求めた $z_1$ と等しいから、

$$z_2 = 1.6 + j0.4 \Omega \quad (\text{答})$$

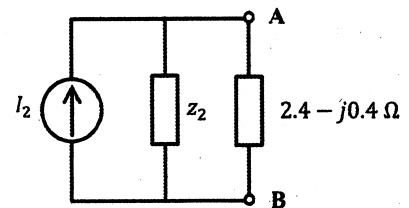
(3) (2)で求めたノートンの等価電流源に負荷を繋いだとき、

負荷に流れる電流を $I_L$ とすると、

$$I_L = 15 \frac{1.6+j0.4}{1.6+j0.4+2.4-j0.4} = 15 \frac{1.6+j0.4}{4} = 6 + j1.5 \text{ A}$$

したがって、負荷の有効電力 $P$ は、

$$P = \text{Re}\{|I_L|^2(2.4+j0.4)\} = \text{Re}\{(6^2+1.5^2)(2.4+j0.4)\} \\ = 38.25 \times 2.4 = 91.8 \approx 92 \text{ W} \quad (\text{答})$$



得点

受験番号				
J				

【電気電子回路】問10

(1)  $0 \leq t < T$  における回路方程式  

$$E = R_1 i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

において、まず過渡解を求める。  
 $E = 0$  として、

$$0 = R_1 i_f(t) + L \frac{di_f(t)}{dt}$$

$$L \frac{di_f(t)}{dt} = -R_1 i_f(t)$$

$$\frac{di_f(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L} i_f(t)$$

$$\frac{1}{i_f(t)} \frac{di_f(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L}$$

$$\int \frac{1}{i_f(t)} \frac{di_f(t)}{dt} dt = \int -\frac{R_1}{L} dt$$

$$\int \frac{1}{i_f(t)} di_f(t) = -\int \frac{R_1}{L} dt$$

$$\ln|i_f(t)| = -\frac{R_1}{L} t + A$$

$$|i_f(t)| = e^{-\frac{R_1}{L} t + A}$$

$$i_f(t) = e^{-\frac{R_1}{L} t + A}$$

次に定常解を求める。  
 $t = T$  は  $t = 0$  から十分に時間が経過しており  $t = \infty$  と考えてよいので、

$$L \frac{di(t=\infty)}{dt} = 0$$

$$E = R_1 i_s(t)$$

$$i_s(t) = \frac{E}{R_1}$$

よって一般解  $i(t)$  は、

$$i(t) = i_f(t) + i_s(t)$$

$$= e^{-\frac{R_1}{L} t + A} + \frac{E}{R_1}$$

$$= e^A e^{-\frac{R_1}{L} t} + \frac{E}{R_1}$$

$i(t)$  の初期値は 0 であるから、

$$i(t=0) = e^A + \frac{E}{R_1} = 0$$

$$e^A = -\frac{E}{R_1}$$

よって、

$$i(t) = -\frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_1}{L} t} + \frac{E}{R_1}$$

$$= \frac{E}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{R_1}{L} t}\right) \quad (\text{答})$$

(2)  $t > T$  における回路方程式は、  
 $t' = t - T$  とすると、  

$$0 = R_2 i(t') + L \frac{di(t')}{dt'}$$

これからまず過渡解を求める。

$$L \frac{di_f(t')}{dt'} = -R_2 i_f(t')$$

$$\frac{di_f(t')}{dt'} = -\frac{R_2}{L} i_f(t')$$

$$\frac{1}{i_f(t')} \frac{di_f(t')}{dt'} = -\frac{R_2}{L}$$

$$\int \frac{1}{i_f(t')} \frac{di_f(t')}{dt'} dt' = \int -\frac{R_2}{L} dt'$$

$$\int \frac{1}{i_f(t')} di_f(t') = -\int \frac{R_2}{L} dt'$$

$$\ln|i_f(t')| = -\frac{R_2}{L} t' + A$$

$$|i_f(t')| = e^{-\frac{R_2}{L} t' + A}$$

$$i_f(t') = e^{-\frac{R_2}{L} t' + A}$$

次に定常解を求める。  
 $t' = \infty$  と考えてよいので、  

$$L \frac{di(t'=\infty)}{dt'} = 0$$

$$R_2 i_s(t') = 0$$

$$i_s(t') = 0$$

よって一般解  $i(t')$  は、  

$$i(t') = i_f(t') + i_s(t')$$

$$= e^{-\frac{R_2}{L} t' + A} + 0$$

$$= e^A e^{-\frac{R_2}{L} t'}$$

$t' = 0$  即ち  $t = T$  は、 $t = 0$  から十分に時間が経過したと考えるとよいので、(1) の答より、

$$i(t = T = \infty) = \frac{E}{R_1}$$

よって、

$$i(t' = 0) = e^A = \frac{E}{R_1}$$

これを  $i(t')$  の式に戻すと、

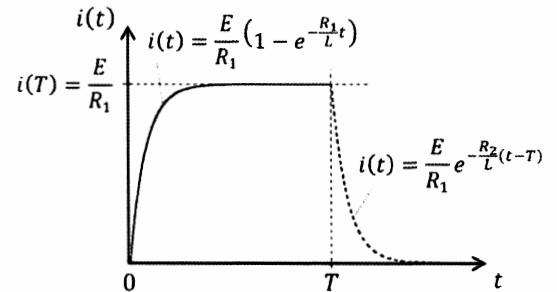
$$i(t') = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_2}{L} t'}$$

これを  $t$  の式に書き換えて、

$$i(t) = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_2}{L}(t-T)} \quad (\text{答})$$

ただし、 $t > T$

(3)



(4)

$t > T$  において  $t' = t - T$  とすると、(2) より、

$$i(t') = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_2}{L} t'}$$

$t = T$  は  $t' = 0$  なので、求める消費エネルギー  $E_{R_2}$  は、

$$E_{R_2} = \int_0^\infty R_2 i^2(t') dt'$$

$$= \int_0^\infty R_2 \left(\frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_2}{L} t'}\right)^2 dt'$$

$$= \int_0^\infty \frac{R_2 E^2}{R_1^2} \left(e^{-\frac{R_2}{L} t'}\right)^2 dt'$$

$$= \frac{R_2 E^2}{R_1^2} \int_0^\infty e^{-\frac{2R_2}{L} t'} dt'$$

$$= \frac{R_2 E^2}{R_1^2} \left[-\frac{L}{2R_2} e^{-\frac{2R_2}{L} t'}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{R_2 E^2}{R_1^2} \left(0 + \frac{L}{2R_2}\right)$$

$$= \frac{L E^2}{2R_1^2} \quad (\text{答})$$

[別解]

求める消費エネルギー  $E_{R_2}$  は、 $S_2$  を閉じた時刻  $t = T$  においてコイルに蓄えられていたエネルギーに等しい。 $t = T$  における電流は  $i = \frac{E}{R_1}$  であるから、

$$E_{R_2} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{R_1}\right)^2 = \frac{L E^2}{2R_1^2} \quad (\text{答})$$

得点

受験番号

J

## 【電磁気学】問 1 1

- (1) 誘電率が異なる2つの誘電体が接していてその境界面に真電荷がないとき、誘電率が異なる2つの誘電体中の電束密度をそれぞれ $D_1$ 、 $D_2$ 、境界面の法線方向を $\hat{n}$ とすると、電束密度に関する境界条件は

$$(D_2 - D_1) \cdot \hat{n} = 0$$

であることから、

$$\text{電束密度は範囲に依らず } D(x) = \frac{Q}{S} \text{ (答)}$$

また、電界を電束密度で表すと定義より  $E = \frac{D}{\epsilon}$

よって各範囲での電界の大きさは以下となる。

$$\text{電界} \begin{cases} \text{(i)} E(x) = \frac{Q}{S\epsilon_2} \\ \text{(ii)} E(x) = \frac{Q}{S\epsilon_1} \text{ (答)} \\ \text{(iii)} E(x) = \frac{Q}{S\epsilon_2} \end{cases}$$

- (2)  $V = \int_0^d E dx$ より、前問(1)の範囲では電界はそれぞれ一定なので

$$V = \frac{(d-2a)Q}{S\epsilon_1} + \frac{2aQ}{S\epsilon_2} = \frac{Q}{S} \left\{ \frac{d}{\epsilon_1} + 2a \left( \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \right\} \text{ (答)}$$

- (3)

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{\frac{d-2a}{\epsilon_1} + \frac{2a}{\epsilon_2}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_2 d + 2(\epsilon_1 - \epsilon_2) a} \text{ (答)}$$

- (4) 並列につないだコンデンサとみなすことができるので

$$C = \frac{\epsilon_0 S_1}{d} + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 (S - S_1)}{\epsilon_2 d + 2(\epsilon_1 - \epsilon_2) a} \text{ (答)}$$

裏面を使う場合はその旨を明記すること

得点

受験番号

J

## 【電磁気学】問12

- (1) 金属線内部を含まない領域( $y < -a, a < y < b-a, y > b+a$ )においてアンペールの法則を考慮すると、電流  $I$  が作る磁束密度は以下の通り。

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{y} + \frac{1}{b-y} \right\} \quad (\text{答})$$

$$B_y = 0 \quad (\text{答})$$

$$B_z = 0 \quad (\text{答})$$

- (2)  $x=0$  面において、磁束密度の方向に対する仮想面上の法線ベクトル  $\hat{n}$  は  $\hat{n} = -\hat{x}$  ( $\hat{x}$ :  $x$  方向単位ベクトル) となる。(1) の結果から  $x=0$  における磁束密度については  $\mathbf{B} = B_x \hat{x}$  となる。よって、 $b > a$  に注意しつつ、仮想面の範囲  $S$  を貫く磁束  $\Phi$  は以下の通り求められる。

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{n} dS = \int_0^1 \int_a^{b-a} B_x \hat{x} \cdot -\hat{x} dy dz \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^1 \int_a^{b-a} -\left( \frac{1}{y} + \frac{1}{b-y} \right) \times -1 dy dz \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{b-a}{a} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

- (3)  $\Phi = LI$  の関係から

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b-a}{a} \quad (\text{答})$$

- (4) 電流が交流の場合である。周波数が高くなるほど表皮効果により電流は表面近くに分布する。 (答)

- (5) アンペールの法則より、電流  $I$  が作る磁束密度は金属面上において法線成分を持たずに接線成分のみ持つ。よってこの事実と(1)の議論を考慮すると、金属板に代わって#1と同じ金属線が金属板に対して対称な位置にもう一つ(#1'とする)存在し、かつ電流が逆向きに流れる構造が題意の構造と等価であると考えられる。一方で、#1と#1'が作る磁束密度が貫く回路内の面積は(2)の場合の半分に制限されるため、 $\Phi$ も半分になる。したがって(3)の議論において、 $b=2h$  および  $\Phi/2 = L'I$  とすることで  $L'$  は次のように求められる。

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h-a}{a} \quad (\text{答})$$

裏面を使う場合はその旨を明記すること

得点

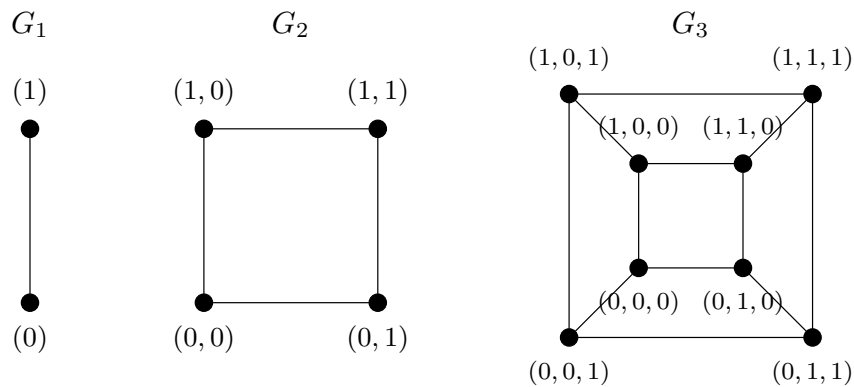
**【数理工学】 問 1 3 解答例**

(1)  $X^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\},$

$X^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

(2)  $\left| \bigcup_{k=1}^n X^k \right| = \sum_{k=1}^n |X^k| = \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$

(3) (ア) グラフの描画



(イ)  $|E_n| = 2^{n-1}n$  となることを  $n$  に関する帰納法で示す。

$n = 1$  のとき,  $E_1 = \{(0)(1)\}$  なので,  $|E_1| = 1 = 2^{1-1} \cdot 1$  となり成立する。

以下,  $n \geq 2$  とし,  $n - 1$  まで正しいと仮定する.  $V_n$  を 2 つの集合

$$K = \{(x_1, \dots, x_n) \in V_n \mid x_n = 0\} \text{ と } K' = \{(x_1, \dots, x_n) \in V_n \mid x_n = 1\}$$

に分割すると,  $K$  によって誘導される  $G_n$  の部分グラフ  $H$  と,  $K'$  によって誘導される  $G_n$  の部分グラフ  $H'$  はともに  $G_{n-1}$  と同型である. よって, 帰納法の仮定より  $|E(H)| = |E(H')| = |E_{n-1}| = 2^{n-2}(n - 1)$  となる (ただし,  $E(H)$  と  $E(H')$  はそれぞれ  $H$  と  $H'$  の辺集合を表す). 一方, 各  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in K$  に対して, 頂点  $(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$  が  $x$  の  $K'$  上の唯一の近傍である. よって,  $H$  と  $H'$  の間の  $G_n$  の辺集合を  $E(H, H')$  とすると,  $|E(H, H')| = |K| = |V_{n-1}| = 2^{n-1}$  である. 以上より,

$$\begin{aligned} |E_n| &= |E(H)| + |E(H')| + |E(H, H')| \\ &= 2^{n-2}(n - 1) + 2^{n-2}(n - 1) + 2^{n-1} = 2^{n-1}n \end{aligned}$$

となる。

なお, 上記の解答は一例であり, グラフのサイズと頂点の次数の関係性を示すなど, いくつかの別解もあり得る。

**【数理工学】 問 1 4** 解答例

(1)  $f(x)$  は連続な奇関数である。実際  $x > 0$  に対して  $-f(-x) = -(-x)(1 + (-x)) = x(1 - x) = f(x)$  となる。よって、 $n = 1, 2, \dots$  に対して、

$$\int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x \, dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx = \frac{4}{n^3\pi^3} \{1 - (-1)^n\}$$

となる。よって

$$f(x) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \{1 - (-1)^n\} \sin n\pi x = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin(2n-1)\pi x$$

となる。

(2) (ア)  $u(t, x) = T(t)X(x)$  を  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  に代入すると、 $T'(t)X(x) = T(t)X''(x)$ 、すなわち

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

が得られる ( $\lambda$  は定数)。よって

$$\begin{cases} T'(t) = \lambda T(t) & (t > 0) \\ X''(x) = \lambda X(x) & (0 < x < 1) \\ X(0) = 0, X(1) = 0 \end{cases}$$

を解けば良い。境界条件を考慮することにより、 $\lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2$  ( $n$  は自然数) に対して、 $A_n, B_n$  を任意定数とすると、 $T(t) = T_n(t) = A_n \exp(\lambda_n t)$ 、 $X(x) = X_n(x) = B_n \sin \sqrt{-\lambda_n} x$  が得られる。

(イ)  $C_n = A_n B_n$  とする。仮定の下で無限級数  $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-n^2\pi^2 t) \sin n\pi x$  は  $t > 0, 0 < x < 1$  で項別微分可能であり、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left\{ \exp(\lambda_n t) \sin \sqrt{-\lambda_n} x \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \{ \lambda_n + (\sqrt{-\lambda_n})^2 \} \left\{ \exp(\lambda_n t) \sin \sqrt{-\lambda_n} x \right\} = 0 \end{aligned}$$

となる。この  $u(t, x)$  に初期条件を考慮する。つまり  $u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x$  が  $f(x) = x(1 - x)$  に一致すれば良い。(1) より  $C_n = \frac{4}{n^3\pi^3} \{1 - (-1)^n\}$  となるので

$$\begin{aligned} u &= u(t, x) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \{1 - (-1)^n\} \exp(-n^2\pi^2 t) \sin n\pi x \\ &= \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \exp(-(2n-1)^2\pi^2 t) \sin(2n-1)\pi x \end{aligned}$$

を得る。

【数理工学】 問 1 5 解答例

(1) (ア) 条件より

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cap B) - P(A \cap B^c) - P(A^c \cap B) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$$

である。

(イ) 条件より

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = \frac{4}{10},$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{2}{10}$$

である。これより  $P(A)P(B) \neq P(A \cap B)$  が成り立つ。ゆえに事象  $A, B$  は独立ではない。

(2) (ア) まず  $0 \leq a < b$  に対して、

$$P((a, b)) = \int_{(a, b)} \frac{1}{2} e^{-t/2} dt = e^{-a/2} - e^{-b/2}$$

である。  $a = 0, b \rightarrow \infty$  とすれば  $P((0, \infty)) = 1$  が示される。

(イ) まず

$$\begin{aligned} \{X \leq x\} &= \{t \in (0, \infty) \mid X(t) \leq x\} \\ &= \{t \in (0, \infty) \mid \sqrt{t} \leq x\} \\ &= \begin{cases} \emptyset, & x \leq 0, \\ (0, x^2), & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって  $x \leq 0$  のときは  $F(x) = 0$  である。また  $x > 0$  のときは

$$F(x) = P((0, x^2)) = 1 - e^{-x^2/2}$$

となる。

(ウ) まず

$$E[X] = \int_{(0, \infty)} X dP = \int_{(0, \infty)} \sqrt{t} \frac{1}{2} e^{-t/2} dt$$

となる。  $s = \sqrt{t}$  と変数変換を行うと

$$E[X] = \int_0^\infty s \frac{1}{2} e^{-s^2/2} 2s ds = \int_0^\infty s^2 e^{-s^2/2} ds = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^\infty s^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

である。

## 【数理工学】問16 解答例

(1) 標本平均  $\bar{x}$ , 標本分散  $s_x^2$  を求めると

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(2 + 8 + 5 + 6 + 4) = 5 \quad s_x^2 = \frac{1}{5}\{(-3)^2 + 3^2 + 0^2 + 1^2 + (-1)^2\} = 4$$

である。 $n = 5$  および学生化の定義式より, 95% 信頼区間は

$$\bar{x} - t_4(0.025)\sqrt{\frac{s_x^2}{4}} < \mu < \bar{x} + t_4(0.025)\sqrt{\frac{s_x^2}{4}}$$

であるから,  $2.22 < \mu < 7.78$  となる。

(2)(ア)  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L, t \in \mathbb{R}$  とする。 $\mathbf{x} = t_1\mathbf{d}, \mathbf{y} = t_2\mathbf{d}$  となる  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  が存在するから,  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (t_1 + t_2)\mathbf{d} \in L, t\mathbf{x} = tt_1\mathbf{d} \in L$  が成り立つ。したがって,  $L$  は部分空間である。

(イ)  $\mathbf{y} = t\mathbf{d}$  とおくと,  $t$  の関数  $f(t) = \|\mathbf{x} - t\mathbf{d}\|^2$  は  $t = t^*$  で最小となる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2t\mathbf{x}^t\mathbf{d} + t^2\|\mathbf{d}\|^2 = nt^2 - 2(x_1 + \cdots + x_n)t + \|\mathbf{x}\|^2 \\ &= n\left(t - \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 + \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{n} \end{aligned}$$

となるので,  $t^* = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ , すなわち  $t^*$  は  $x_1, \dots, x_n$  の (標本) 平均  $\bar{x}$  に等しい。

(ウ)  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 = \|\mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{d}\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  であるから, 標本分散  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  の  $n$  倍 (偏差の 2 乗和) に等しい。