2026 年度　熊本大学大学院自然科学教育部（博士前期課程）2 期募集
理学専攻・数学コース　専門基礎科目　解答例

$\boxed{1}$

(問 1) 5

(問 2) 固有値は $1, 5$ で固有値 λ の固有空間を $W(\lambda; A)$ と書くことにすると，$W(1;A) = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $W(5;A) = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となる。

(問 3) 例えば $P = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-i}{2\sqrt{3}} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-i}{2\sqrt{3}} & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 5 \end{bmatrix}$ となる。

(問 4) $Xv = \lambda v$ で $v \neq 0$ であるとする。標準エルミート内積を $(\cdot, \cdot)$ で表す。X がエルミート行列であることから

$$(Xv, v) = {}^t(Xv)\overline{v} = ({}^tv\,{}^tX)\overline{v} = {}^tv({}^tX\overline{v}) = (v, {}^t\overline{X}v) = (v, Xv)$$

なので，

$$(Xv, v) = (v, Xv) = (v, \lambda v) = \overline{\lambda}(v, v)$$

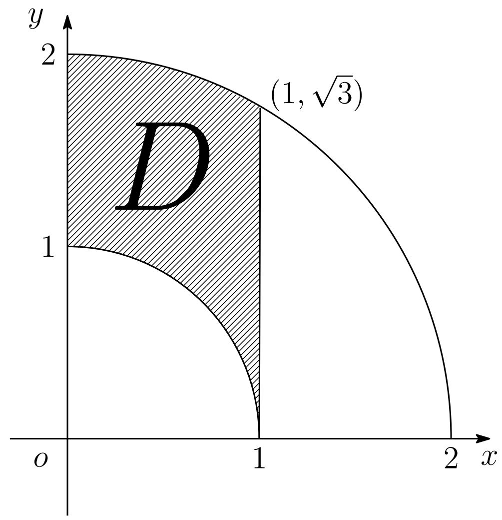
となる。一方

$$(Xv, v) = (\lambda v, v) = \lambda(v, v)$$

なので，$\lambda(v,v) = \overline{\lambda}(v,v)$ で，$(v,v) \neq 0$ なので，$\lambda = \overline{\lambda}$ となる。したがって λ は実数である。

$\boxed{2}$

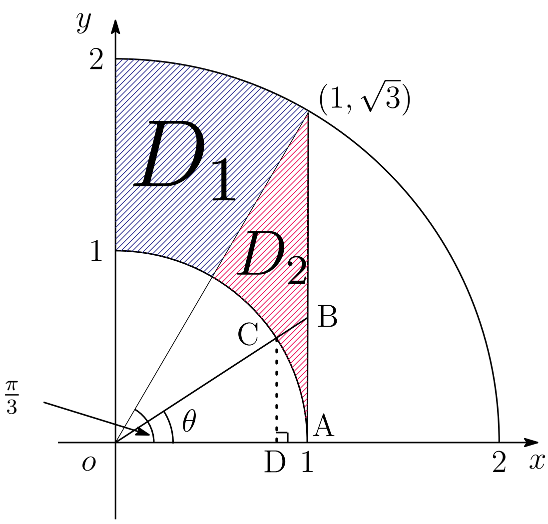
(問 1)



(問 2)

$$\left\{\log\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)\right\}'=\frac{1}{\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)=\frac{1}{\cos\theta}.$$

(問 3)



D を図のように D_1 と D_2 に分けると,

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{D_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy+\iint_{D_2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$$

極座標変換 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ $(r\geqq 0, 0\leqq\theta<2\pi)$ を考える. 極座標変換により D_1 は (r,θ) 平面の Ω_1, D_2 は (r,θ) 平面の Ω_2 に対応するものとすると,

$$\iint_{D_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{\Omega_1} r\cos\theta\,drd\theta,\ \iint_{D_2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint_{\Omega_2} r\cos\theta\,drd\theta.$$

図より $\Omega_1 = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leqq r \leqq 2, \pi/3 \leqq \theta \leqq \pi/2\}$ となるので,

$$\iint_{\Omega_1} r\cos\theta\, dr d\theta = \int_1^2 r\, dr \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \frac{6-3\sqrt{3}}{4}.$$

図より, Ω_2 における θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi/3$ の範囲を動く．$0 \leqq \theta \leqq \pi/3$ とする．原点 O を通り傾き $\tan\theta$ の直線が, $x \geqq 0$ において円 $x^2+y^2=1$ と交わる点, $x \geqq 0$ において直線 $x=1$ と交わる点をそれぞれ C, B とおき, C から x 軸に下ろした垂線の足を D とおく．このとき, r が動く範囲は OC の長さから OB の長さまでである．OC の長さは 1 である．OB の長さを a とおく．三角形 OAB と三角形 ODC は相似より, OB : OA = OC : OD. OA = OC = 1, OD = $\cos\theta$ より,

$$a = \frac{1}{\cos\theta}.$$

よって, Ω_2 は次のように表せる:

$$\Omega_2 = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqq \theta \leqq \pi/3,\ 1 \leqq r \leqq 1/\cos\theta\}.$$

$\displaystyle\iint_{\Omega_2} r\cos\theta\, dr d\theta$ を計算すると

$$\iint_{\Omega_2} r\cos\theta\, dr d\theta = \int_0^{\pi/3} d\theta \int_1^{1/\cos\theta} r\cos\theta\, dr = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \cos\theta\, d\theta.$$

(問 2) の結果より

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos\theta} = \left[\log\left(\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/3} = \log(\sqrt{3}+2).$$

また,

$$\int_0^{\pi/3} \cos\theta\, d\theta = [\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって,

$$\iint_{\Omega_2} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\log(\sqrt{3}+2) - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

したがって

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{6-3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{3}+2) - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{3}+2).$$

$\boxed{3}$

(問 1) $a \in A$ に対して，$d(x,a) \leqq d(x,y) + d(y,a)$ となるので，

$$d(x,A) \leqq d(x,y) + d(y,a)$$

となる．よって，$d(x,A) - d(x,y)$ は $\{d(y,a) \mid a \in A\}$ の一つの下界である．ゆえに，

$$d(x,A) - d(x,y) \leqq d(y,A)$$

となる．まったく同様にして，

$$d(y,A) - d(y,x) \leqq d(x,A)$$

となる．$d(x,y) = d(y,x) \geqq 0$ であるので，

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leqq d(x,y)$$

となる．

(問 2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \varepsilon$ とおく．(問 1) より，$d(x,y) < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となることが分かる．よって，f は連続関数である．

(問 3) $d(x,A) \geqq 0$ なので，$d(x,A) = 0$ となるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $d(x,a) < \varepsilon$ となる $a \in A$ が存在することであり，この条件は $N(x;\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ と同値である．ただし，

$$N(x;\varepsilon) := \{p \in X \mid d(x,p) < \varepsilon\}$$

である．よって，$d(x,A) = 0$ と x が A の触点となることは同値である．