

## 曲面上の主分布

### *Principal distributions on surfaces*

キーワード：曲面、主分布、臍点、指数、過剰決定系 / key words: surface, principal distribution, umbilical point, index, over-determined system

安藤 直也 准教授 博士（数理学） / Naoya ANDO Associate Prof., Dr. (Math. Sci.)

基礎科学部門 数学分野 / Division: Natural Science, Research Field: Mathematics

E-mail : ando@sci.※ Tel : 096-342-3338 URL : <http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~ando/index-j.html>

●**曲面上の孤立臍点の指数** 孤立臍点についてはその指数（主分布の回転数）が基本的な情報であり、関連してCarathéodoryの予想およびLoewnerの予想が知られている。一方で、任意の半整数は  $C^1$  級の臍点の指数に成り得る。平均曲率一定曲面についてのHopfの定理の類似物が、特別なWeingarten曲面および非等方的平均曲率一定曲面について成り立つ。Willmore曲面の孤立臍点の指数は  $1/2$  以下である。

●**曲面上の過剰決定系**  $E^3$  内の臍点を持たず主曲率が零ではない曲面に対し、その上の誘導計量および主分布が定める過剰決定系の解は主曲率を与える。系が整合条件を満たす曲面はmoldingでありそして主方向平行である。系がちょうど二つの解を持つ曲面として零ではない一定平均曲率を持つ曲面で回転面の一部ではないものが挙げられる。系の解が一意でありさらに「重解」である曲面として極小曲面で回転面の一部ではないものが挙げられる。非平坦 3 次元空間型内の曲面上の過剰決定系についても類似の議論を行なうことができる。

●**4 次元空間内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面**  $E^4$  内の極小曲面で各点での主曲率が単位法ベクトルの取り方に依らないものは  $C^2$  内の複素曲線と合同であり、アファインSchwarz写像を用いて表される。4 次元超Kähler多様体内の同様の性質を持つ極小曲面は空間のある複素構造に関する複素曲線である。 $S^4$  内の同様の性質を持つ極小曲面は  $S^4$  に付随するツイスター空間の観点で特徴づけられる。 $S^4_1$  内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面は共形Gauss写像により  $S^3$  内のWillmore曲面とほとんど同一視される。4 次元のRiemannまたはLorentz空間型内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面はある法ベクトルに関する主分布の観点で特徴づけられる。

**The index of an isolated umbilical point:** Carathéodory's conjecture and Loewner's conjecture are known, while any half-integer can be the index of a  $C^1$ -umbilical point. Hopf's theorem for surfaces with constant mean curvature has analogues for special Weingarten surfaces and surfaces with constant anisotropic mean curvature. The index of an isolated umbilical point on a Willmore surface does not exceed  $1/2$ .

**Over-determined systems on surfaces:** On a surface in  $E^3$  with no umbilical points and nowhere zero Gaussian curvature, the induced metric and principal distributions give an over-determined system such that principal curvatures are given by a solution. If the system satisfies the compatibility condition, then each solution corresponds to a molding surface, which is parallel curved. On a surface with constant mean curvature which is not part of any surface of revolution, the system has either just two solutions or a unique and "multiple" solution. On surfaces in 3-dimensional non-flat space forms, we can find over-determined systems similarly and have analogous discussions.

**Space-like surfaces in 4-dimensional spaces with zero mean curvature vector:** A minimal surface in  $E^4$  such that at each point, principal curvatures do not depend on the choice of a unit normal vector is congruent with a complex curve in  $C^2$  and represented by an affine Schwarz map. A minimal surface in a 4-dimensional hyperKähler manifold with the above property is a complex curve with respect to a suitable complex structure of the space. A minimal surface in  $S^4$  with the above property is characterized in terms of the twistor space associated with  $S^4$ . A space-like surface in  $S^4_1$  with zero mean curvature vector is almost identified with a Willmore surface in  $S^3$  via the conformal Gauss map. Space-like surfaces in 4-dimensional Riemannian and Lorentz space forms with zero mean curvature vector are characterized in terms of principal distributions with respect to suitable normal vector fields.