

## 曲面上の主分布

### *Principal distributions on surfaces*

キーワード：主分布、臍点、指数、過剰決定系、正則 4 次微分/

keywords: principal distribution, umbilical point, index, over-determined system, holomorphic quartic differential

安藤 直也 准教授 博士（数理科学） / Naoya ANDO Associate Prof., Dr. (Math. Sci.)

基礎科学部門 数学分野 / Division: Natural Science, Research Field: Mathematics

E-mail: andonaoya@※ URL: <http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~ando/index-j.html>

●孤立臍点の指数 Willmore曲面上の孤立臍点の指数の評価；非等方的平均曲率一定曲面に対するHopfの定理の一般化 (Koiso-Palmer) の別証明：Loewnerの予想とは異なるが指数予想を含む予想； $C^1$  級の臍点の指数 (Ando-Fujiyama-Umehara).

●曲面上の過剰決定系  $E^3$  内の臍点を持たず主曲率が零ではない曲面上で誘導計量および主分布が定める過剰決定系の解は主曲率を与える. 系が整合条件を満たす曲面はモールディングであり主方向平行である. 系がちょうど二つの解を持つまたは一意の「重解」を持つならば, 各解は平均曲率一定曲面に対応する. 空間が非平坦の場合にも対応する結果が得られる.

●4 次元空間内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面 4 次元Riemann空間型内の極小曲面上のある正則 4 次微分が零であることと曲面が等方的極小であることは同値である.  $E^4$  内の等方的極小曲面は  $C^2$  内の複素曲線と合同でありアファインSchwarz写像で表される. 4 次元Lorentz空間型内の平均曲率ベクトルが零である殆どの空間的曲面は共形Gauss写像により 3 次元空間内の空間的曲面 (Willmore曲面またはその類似物) に対応し, 対応し合う曲面上定義される正則 4 次微分は定数倍を除いて等しい. 4 次元のRiemannおよびLorentz空間型内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面はある法ベクトル場に関する主分布の観点で特徴づけられる. Kähler曲面が超Kähler多様体であるための条件が等方的極小曲面の観点で得られる.

**The index of an isolated umbilical point** The index of an isolated umbilical point on a Willmore surface does not exceed  $1/2$ . I presented another proof of a generalization of Hopf's theorem for surfaces with constant anisotropic mean curvature by Koiso-Palmer. I devised another conjecture than Loewner's conjecture which includes the index conjecture. Any half-integer can be the index of a  $C^1$ -umbilical point (Ando-Fujiyama-Umehara).

**Over-determined systems on surfaces** On a surface in  $E^3$  with nonzero and distinct two principal curvatures, the induced metric and principal distributions give an over-determined system which has a solution for principal curvatures. If the system satisfies the compatibility condition, then each solution gives a molding surface, which is parallel curved. If the system has just two solutions or a unique and "multiple" solution, then each solution corresponds to a surface with constant mean curvature.

**Space-like surfaces in 4-dimensional spaces with zero mean curvature vectors** A holomorphic quartic differential on a minimal surface in  $E^4$ ,  $S^4$  or  $H^4$  vanishes if and only if it is an isotropic minimal surface. Such a surface in  $E^4$  is congruent with a complex curve in  $C^2$  and represented by an affine Schwarz map. Most space-like surfaces in  $E^4_1$ ,  $S^4_1$  or  $H^4_1$  with zero mean curvature vector correspond to space-like surfaces in 3-dimensional spaces (Willmore surfaces or their analogues) via the conformal Gauss maps and in this correspondence, holomorphic quartic differentials on surfaces coincides up to a nonzero constant. Space-like surfaces in 4-dimensional Riemannian and Lorentz space forms with zero mean curvature vector are characterized in terms of principal distributions with respect to suitable normal vector fields. A characterization of hyper-Kähler 4-manifolds is obtained in terms of isotropic minimal surfaces.